Neuronale Netze

Prof. Dr. Rudolf Kruse

Computational Intelligence
Institut für Intelligente Kooperierende Systeme
Fakultät für Informatik
`rudolf.kruse@ovgu.de`

Allgemeine (Künstliche) Neuronale Netze

Graphentheoretische Grundlagen

Ein (gerichteter) **Graph** ist ein Tupel $G = (V, E)$, bestehend aus einer (endlichen) Menge V von **Knoten** oder **Ecken** und einer (endlichen) Menge $E \subseteq V \times V$ von **Kanten**.

Wir nennen eine Kante $e = (u, v) \in E$ **gerichtet** von Knoten u zu Knoten v.

Sei $G = (V, E)$ ein (gerichteter) Graph und $u \in V$ ein Knoten. Dann werden die Knoten der Menge

$$\operatorname{pred}(u) = \{v \in V \mid (v, u) \in E\}$$

die **Vorgänger** des Knotens u
und die Knoten der Menge

$$\operatorname{succ}(u) = \{v \in V \mid (u, v) \in E\}$$

die **Nachfolger** des Knotens u genannt.

Allgemeine Definition eines neuronalen Netzes

Ein (künstliches) **neuronales Netz** ist ein (gerichteter) Graph $G = (U, C)$, dessen Knoten $u \in U$ **Neuronen** oder **Einheiten** und dessen Kanten $c \in C$ **Verbindungen** genannt werden.

Die Menge U der Knoten wird partitioniert in

die Menge U_{in} der **Eingabeneuronen**,

die Menge U_{out} der **Ausgabeneuronen**, und

die Menge U_{hidden} der **versteckten Neuronen**.

Es gilt

$$U = U_{\text{in}} \cup U_{\text{out}} \cup U_{\text{hidden}},$$

$$U_{\text{in}} \neq \emptyset, \qquad U_{\text{out}} \neq \emptyset, \qquad U_{\text{hidden}} \cap (U_{\text{in}} \cup U_{\text{out}}) = \emptyset.$$

Jede Verbindung $(v, u) \in C$ besitzt ein **Gewicht** w_{uv} und
jedes Neuron $u \in U$ besitzt drei (reellwertige) Zustandsvariablen:

die **Netzwerkeingabe** net_u,

die **Aktivierung** act_u, und

die **Ausgabe** out_u.

Jedes Eingabeneuron $u \in U_{\mathrm{in}}$ besitzt weiterhin eine vierte reellwertige Zustandsvariable,

die **externe Eingabe** ex_u.

Weiterhin besitzt jedes Neuron $u \in U$ drei Funktionen:

- die **Netzwerkeingabefunktion** $f_{\mathrm{net}}^{(u)} : \mathbb{R}^{2|\mathrm{pred}(u)|+\kappa_1(u)} \to \mathbb{R}$,
- die **Aktivierungsfunktion** $f_{\mathrm{act}}^{(u)} : \mathbb{R}^{\kappa_2(u)} \to \mathbb{R}$, und
- die **Ausgabefunktion** $f_{\mathrm{out}}^{(u)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

die benutzt werden, um die Werte der Zustandsvariablen zu berechnen.

Typen (künstlicher) neuronaler Netze

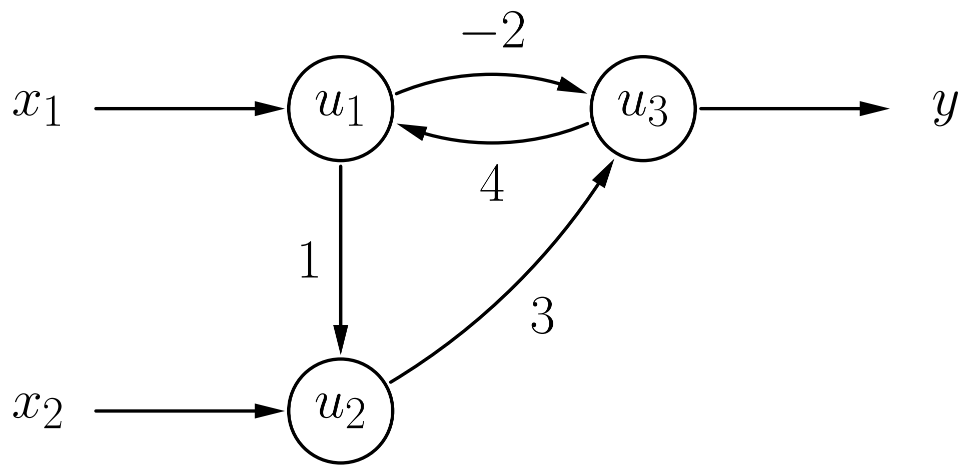
Falls der Graph eines neuronalen Netzes **azyklisch** ist, wird das Netz **Feed-Forward-Netzwerk** genannt.

Falls der Graph eines neuronalen Netzes **Zyklen** enthält, (rückwärtige Verbindungen), wird es **rekurrentes Netzwerk** genannt.

Darstellung der Verbindungsgewichte als Matrix

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & \ldots & u_r \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
w_{u_1 u_1} & w_{u_1 u_2} & \ldots & w_{u_1 u_r} \\
w_{u_2 u_1} & w_{u_2 u_2} & & w_{u_2 u_r} \\
\vdots & & & \vdots \\
w_{u_r u_1} & w_{u_r u_2} & \ldots & w_{u_r u_r}
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{array}
\end{array}
$$

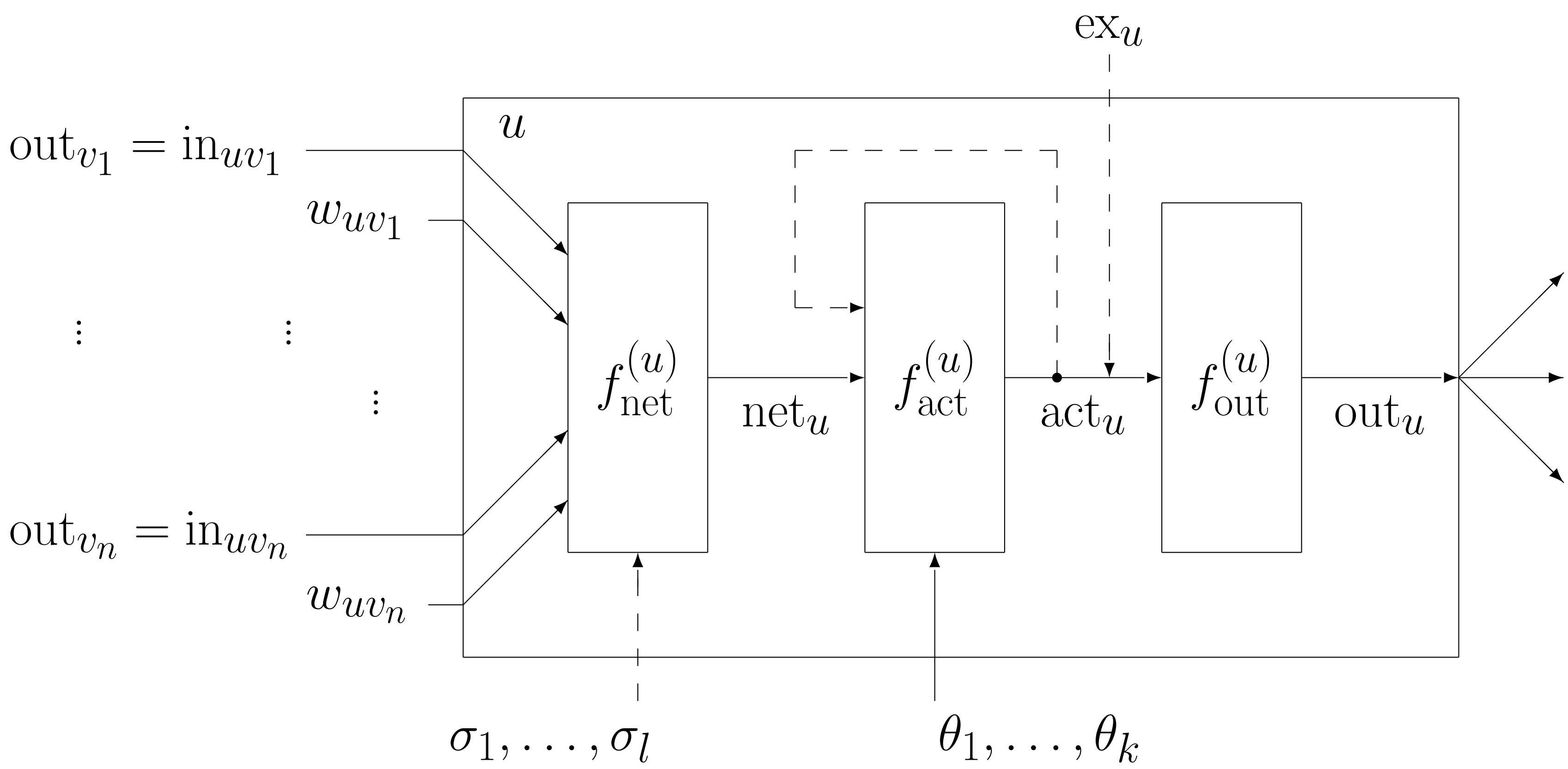
Ein einfaches rekurrentes neuronales Netz:



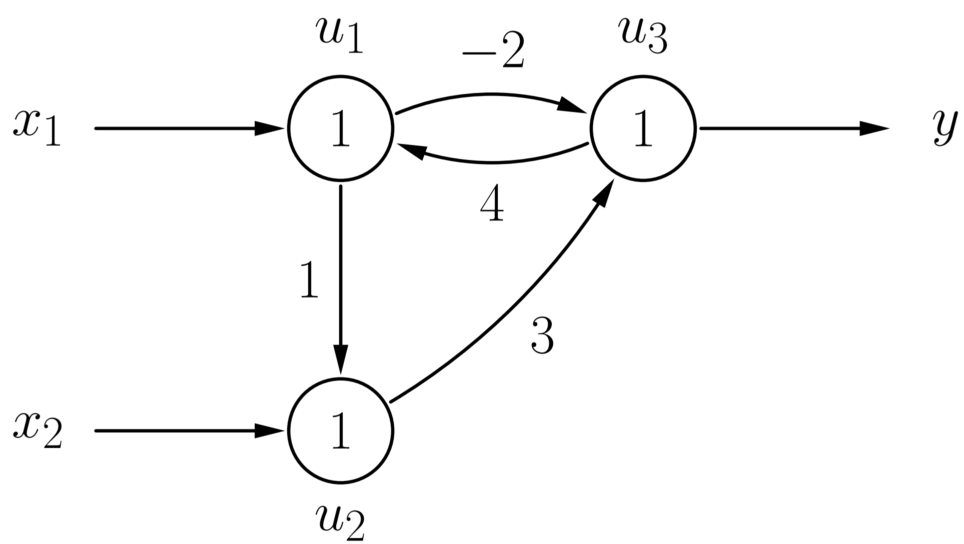
Gewichtsmatrix dieses Netzes:

$$
\begin{array}{c c}
\begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} & \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}
\end{array}
$$

Ein verallgemeinertes Neuron verarbeitet numerische Werte



Allgemeine Neuronale Netze: Beispiel



Merke: Die Gewichte der Knoten dieses Graphen sind die Schwellenwerte θ_i.

$$f_{\text{net}}^{(u)}(\vec{w}_u, \vec{\text{in}}_u) = \textstyle\sum_{v \in \text{pred}(u)} w_{uv} \text{in}_{uv} = \sum_{v \in \text{pred}(u)} w_{uv} \, \text{out}_v$$

$$f_{\text{act}}^{(u)}(\text{net}_u, \theta) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad \text{net}_u \geq \theta, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$f_{\text{out}}^{(u)}(\text{act}_u) = \text{act}_u$$

Allgemeine Neuronale Netze: Beispiel

Aktualisierung der Neuronenaktivierungen

	u_1	u_2	u_3	
Eingabephase	**1**	**0**	**0**	
Arbeitsphase	1	0	**0**	$\mathrm{net}_{u_3} = -2$
	0	0	0	$\mathrm{net}_{u_1} = 0$
	0	**0**	0	$\mathrm{net}_{u_2} = 0$
	0	0	**0**	$\mathrm{net}_{u_3} = 0$
	0	0	0	$\mathrm{net}_{u_1} = 0$

Aktualisierungsreihenfolge:
$u_3, u_1, u_2, u_3, u_1, u_2, u_3, \ldots$

Eingabephase: Aktivierungen/Ausgaben im Startzustand (erste Zeile)

Die Aktivierung des gerade zu aktualisierenden Neurons (fettgedruckt) wird mit Hilfe der Ausgaben der anderen Neuronen und der Gewichte neu berechnet.

Ein stabiler Zustand mit eindeutiger Ausgabe wird erreicht.

Aktualisierung der Neuronenaktivierungen

	u_1	u_2	u_3	
Eingabephase	**1**	**0**	**0**	
Arbeitsphase	1	0	**0**	$\text{net}_{u_3} = -2$
	1	**1**	0	$\text{net}_{u_2} = 1$
	0	1	0	$\text{net}_{u_1} = 0$
	0	1	**1**	$\text{net}_{u_3} = 3$
	0	**0**	1	$\text{net}_{u_2} = 0$
	1	0	1	$\text{net}_{u_1} = 4$
	1	0	**0**	$\text{net}_{u_3} = -2$

Aktualisierungsreihenfolge:
$u_3, u_2, u_1, u_3, u_2, u_1, u_3, \ldots$

Es wird kein stabiler Zustand erreicht (Oszillation der Ausgabe).

Definition von Lernaufgaben für ein neuronales Netz

Eine **feste Lernaufgabe** L_{fixed} für ein neuronales Netz mit

n Eingabeneuronen, d.h. $U_{\text{in}} = \{u_1, \ldots, u_n\}$, and

m Ausgabeneuronen, d.h. $U_{\text{out}} = \{v_1, \ldots, v_m\}$,

ist eine Menge von **Trainingsbeispielen** $l = (\vec{\imath}^{\,(l)}, \vec{o}^{\,(l)})$, bestehend aus

einem **Eingabevektor** $\vec{\imath}^{\,(l)} = (\,\text{ex}_{u_1}^{(l)}, \ldots, \text{ex}_{u_n}^{(l)}\,)$ and

einem **Ausgabevektor** $\vec{o}^{\,(l)} = (o_{v_1}^{(l)}, \ldots, o_{v_m}^{(l)})$.

Eine feste Lernaufgabe gilt als gelöst, wenn das NN für alle Trainingsbeispiele $l \in L_{\text{fixed}}$ aus den externen Eingaben im Eingabevektor $\vec{\imath}^{\,(l)}$ eines Trainingsmusters l die Ausgaben berechnet, die im entsprechenden Ausgabevektor $\vec{o}^{\,(l)}$ enthalten sind.

Lösen einer festen Lernaufgabe: Fehlerbestimmung

Bestimme, wie gut ein neuronales Netz eine feste Lernaufgabe löst.

Berechne Differenzen zwischen gewünschten und berechneten Ausgaben.

Summiere Differenzen nicht einfach, da sich die Fehler gegenseitig aufheben könnten.

Quadrieren liefert passende Eigenschaften, um die Anpassungsregeln abzuleiten.

$$e = \sum_{l \in L_{\text{fixed}}} e^{(l)} = \sum_{v \in U_{\text{out}}} e_v = \sum_{l \in L_{\text{fixed}}} \sum_{v \in U_{\text{out}}} e_v^{(l)},$$

$$\text{wobei} \qquad e_v^{(l)} = \left(o_v^{(l)} - \text{out}_v^{(l)}\right)^2$$

Definition von Lernaufgaben für ein neuronales Netz

Eine **freie Lernaufgabe** L_{free} für ein neuronales Netz mit

n Eingabeneuronen, d.h. $U_{\text{in}} = \{u_1, \ldots, u_n\}$,

ist eine Menge von **Trainingsbeispielen** $l = (\vec{\imath}^{\,(l)})$, wobei jedes aus

einem **Eingabevektor** $\vec{\imath}^{\,(l)} = (\,\text{ex}_{u_1}^{(l)}, \ldots, \text{ex}_{u_n}^{(l)}\,)$ besteht.

Eigenschaften:

Es gibt keine gewünschte Ausgabe für die Trainingsbeispiele.

Ausgaben können von der Trainingsmethode frei gewählt werden.

Lösungsidee: **Ähnliche Eingaben sollten zu ähnlichen Ausgaben führen.**
(Clustering der Eingabevektoren)

Normalisierung der Eingabevektoren

Berechne Erwartungswert und Standardabweichung jeder Eingabe:

$$\mu_k = \frac{1}{|L|} \sum_{l \in L} \mathrm{ex}_{u_k}^{(l)} \qquad \text{and} \qquad \sigma_k = \sqrt{\frac{1}{|L|} \sum_{l \in L} \left(\mathrm{ex}_{u_k}^{(l)} - \mu_k \right)^2},$$

Normalisiere die Eingabevektoren auf Erwartungswert 0 und Standardabweichung 1:

$$\mathrm{ex}_{u_k}^{(l)(\mathrm{neu})} = \frac{\mathrm{ex}_{u_k}^{(l)(\mathrm{alt})} - \mu_k}{\sigma_k}$$

Vermeidet Skalierungsprobleme.