

10. Übungsblatt

Aufgabe 38 Hopfield-Netze: Mustererkennung

In einem Hopfield-Netz mit vier Neuronen sollen die beiden Muster $(-1, +1, -1, +1)$ und $(+1, -1, -1, +1)$ gespeichert werden, d.h., diese Muster sollen stabile Zustände des Netzes sein, die durch eine Aktualisierung beliebiger Neuronen nicht verlassen werden.

- Berechnen Sie die Verbindungsgewichte und die Schwellenwerte der Neuronen eines Hopfield-Netzes, das die genannten Muster speichert!
- Wie viele weitere Muster können in diesem Netz noch gespeichert werden?
- Finden Sie zwei weitere Muster, die man zusätzlich in dem von Ihnen konstruierten Netz speichern könnte, ohne dass die alten Muster vergessen werden!
(Um diese Muster tatsächlich zu speichern, müssen natürlich eventuell die Verbindungsgewichte geändert werden.)

Aufgabe 39 Vapnik-Chervonenkis-Dimension

- Informieren Sie sich über die Vapnik-Chervonenkis-Dimension (VC-Dimension). Was besagt diese Größe und warum spielt sie für das Erlernen einer Funktion aus Datenpunkten (z.B. durch ein neuronales Netz) eine Rolle?
- Wie groß ist die VC-Dimension einer Hyperebene im Raum \mathbb{R}^n ? Verdeutlichen Sie Ihre Überlegungen mit Beispielen für $n = 2$.
- Die Indikatorfunktion $I(f(x))$ ist definiert als 1, falls $f(x) > 0$, und -1 sonst. Zeigen Sie, dass die Menge der Funktionen $\{I(\sin(\alpha x) > 0)\}$ die folgenden Punkte im eindimensionalen Raum für beliebige l trennen kann:

$$z_1 = 10^{-1}, \dots, z_l = 10^{-l}.$$

Das heißt, zeigen Sie, dass die VC-Dimension dieser Klasse von Funktionen unendlich ist. Hinweis: Es genügt dazu

$$\alpha = \pi \left(1 + \sum_{i=1}^l \frac{(1 - y_i) 10^i}{2} \right)$$

geschickt zu wählen und zu zeigen, dass für beliebige $l \in \mathbb{N}$ und beliebige Labels

$$y_k \in \{-1, 1\}, \forall 1 \leq k \leq l$$

die Indikatorfunktion das gewünschte Label liefert.

Aufgabe 40 Kernel-Trick

- Informieren Sie sich über den sogenannten Kernel-Trick. Was besagt er und wo kommt er zum Einsatz?

- b) Wie kann das Optimierungsproblem einer linearen SVM angepasst werden, um auch nicht-lineare Lösungen zu finden?