

# Neuronale Netze

Prof. Dr. Rudolf Kruse

Computational Intelligence  
Institut für Intelligente Kooperierende Systeme  
Fakultät für Informatik  
[kruse@iws.cs.uni-magdeburg.de](mailto:kruse@iws.cs.uni-magdeburg.de)



# Mehrschichtige Perzeptren

Multilayer Perceptrons (MLPs)

# Mehrschichtige Perzeptren

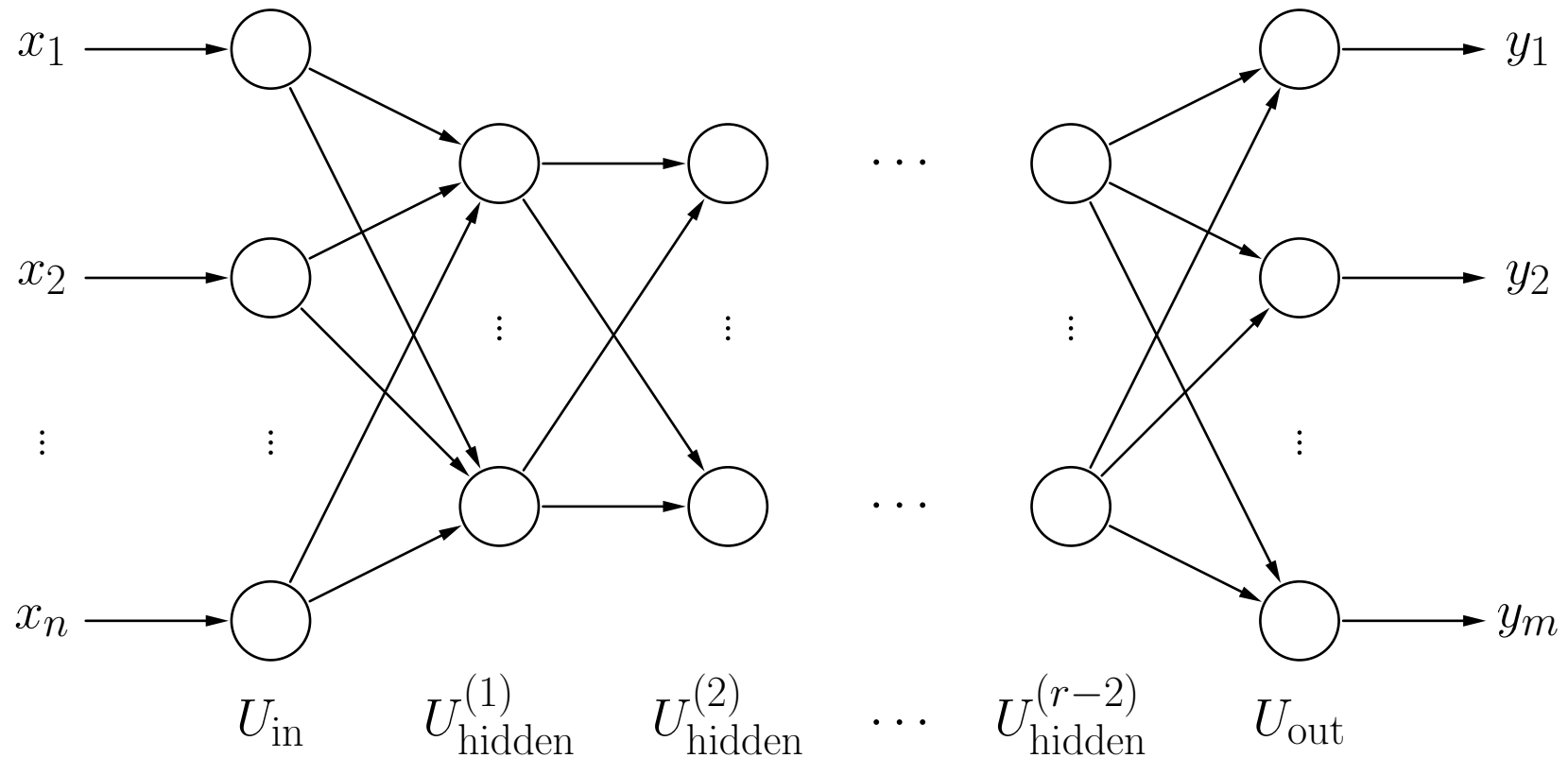
Ein **r-schichtiges Perzeptron** ist ein neuronales Netz mit einem Graph  $G = (U, C)$  das die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i)  $U_{\text{in}} \cap U_{\text{out}} = \emptyset$ ,
- (ii)  $U_{\text{hidden}} = U_{\text{hidden}}^{(1)} \cup \dots \cup U_{\text{hidden}}^{(r-2)}$ ,  
 $\forall 1 \leq i < j \leq r - 2 : U_{\text{hidden}}^{(i)} \cap U_{\text{hidden}}^{(j)} = \emptyset$ ,
- (iii)  $C \subseteq \left( U_{\text{in}} \times U_{\text{hidden}}^{(1)} \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^{r-3} U_{\text{hidden}}^{(i)} \times U_{\text{hidden}}^{(i+1)} \right) \cup \left( U_{\text{hidden}}^{(r-2)} \times U_{\text{out}} \right)$   
oder, falls keine versteckten Neuronen vorhanden ( $r = 2, U_{\text{hidden}} = \emptyset$ ),  
 $C \subseteq U_{\text{in}} \times U_{\text{out}}$ .

Vorwärtsgerichtetes Netz mit streng geschichteter Struktur.

# Mehrschichtige Perzeptren

## Allgemeine Struktur eines mehrschichtigen Perzeptrons



# Mehrschichtige Perzeptren

Die Netzwerkeingabe jedes versteckten Neurons und jedes Ausgabeneurons ist die **gewichtete Summe** seiner Eingaben, d.h.

$$\forall u \in U_{\text{hidden}} \cup U_{\text{out}} : \quad f_{\text{net}}^{(u)}(\vec{w}_u, \vec{\text{in}}_u) = \vec{w}_u \vec{\text{in}}_u = \sum_{v \in \text{pred}(u)} w_{uv} \text{out}_v .$$

Die Aktivierungsfunktion jedes versteckten Neurons ist eine sogenannte **Sigmoide**, d.h. eine monoton steigende Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \quad \text{with} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 .$$

Die Aktivierungsfunktion jedes Ausgabeneurons ist ebenfalls entweder eine Sigmoide oder eine **lineare Funktion**, d.h.

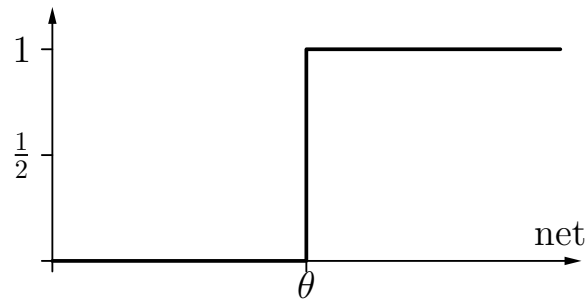
$$f_{\text{act}}(\text{net}, \theta) = \alpha \text{net} - \theta .$$

Nur die Stufenfunktion ist eine neurobiologisch plausible Aktivierungsfunktion.

# Sigmoide als Aktivierungsfunktionen

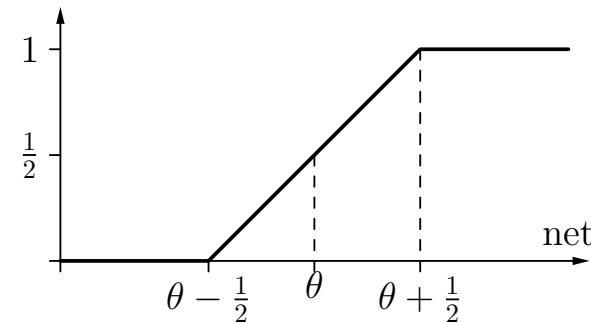
Stufenfunktion:

$$f_{\text{act}}(\text{net}, \theta) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \text{net} \geq \theta, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



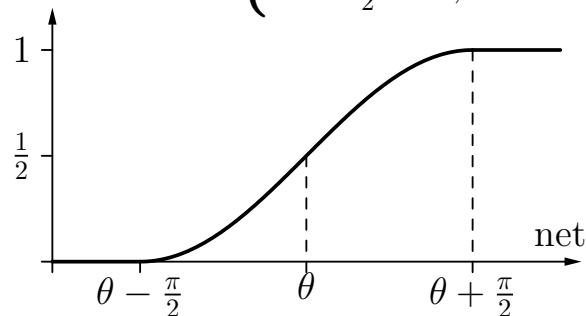
Semilineare Funktion:

$$f_{\text{act}}(\text{net}, \theta) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \text{net} > \theta + \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{falls } \text{net} < \theta - \frac{1}{2}, \\ (\text{net} - \theta) + \frac{1}{2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$



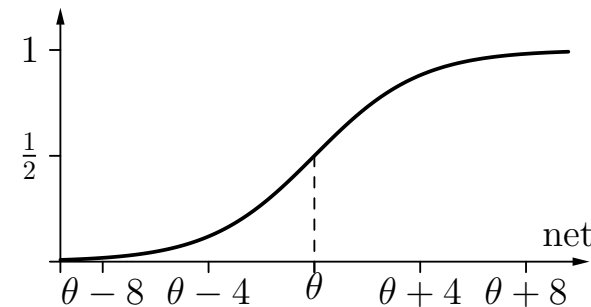
Sinus bis Sättigung:

$$f_{\text{act}}(\text{net}, \theta) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \text{net} > \theta + \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{falls } \text{net} < \theta - \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\sin(\text{net} - \theta) + 1}{2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$



Logistische Funktion:

$$f_{\text{act}}(\text{net}, \theta) = \frac{1}{1 + e^{-(\text{net} - \theta)}}$$



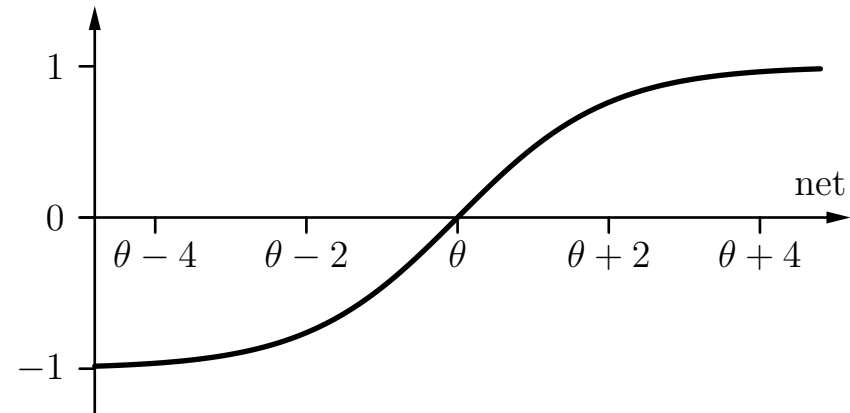
# Sigmoide als Aktivierungsfunktionen

Alle Sigmoiden auf der vorherigen Folie sind **unipolar**, d.h. sie reichen von 0 bis 1.

Manchmal werden **bipolare** sigmoidale Funktionen verwendet, wie beispielsweise der *tangens hyperbolicus*.

tangens hyperbolicus:

$$\begin{aligned} f_{\text{act}}(\text{net}, \theta) &= \tanh(\text{net} - \theta) \\ &= \frac{2}{1 + e^{-2(\text{net} - \theta)}} - 1 \end{aligned}$$



# Mehrschichtige Perzeptren: Gewichtsmatrizen

Seien  $U_1 = \{v_1, \dots, v_m\}$  and  $U_2 = \{u_1, \dots, u_n\}$  die Neuronen zwei aufeinanderfolgender Schichten eines MLP.

Ihre Verbindungsgewichte werden dargestellt als eine  $n \times m$ -Matrix

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_{u_1v_1} & w_{u_1v_2} & \dots & w_{u_1v_m} \\ w_{u_2v_1} & w_{u_2v_2} & \dots & w_{u_2v_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{u_nv_1} & w_{u_nv_2} & \dots & w_{u_nv_m} \end{pmatrix},$$

wobei  $w_{u_iv_j} = 0$ , falls es keine Verbindung von Neuron  $v_j$  zu Neuron  $u_i$  gibt.

Vorteil: Die Berechnung der Netzwerkeingabe kann geschrieben werden als

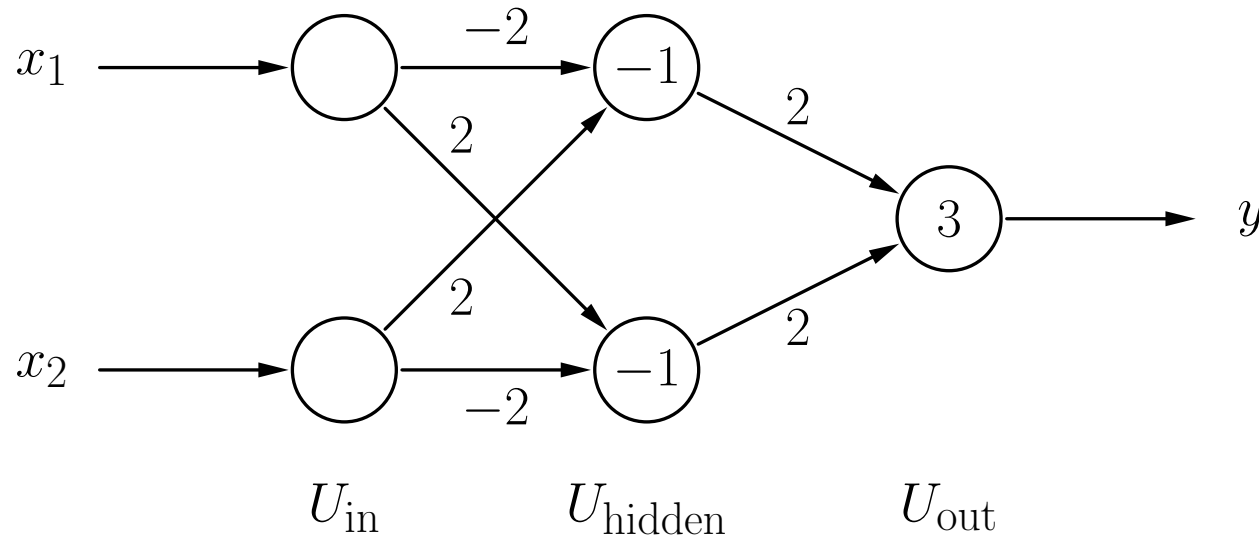
$$\vec{\text{net}}_{U_2} = \mathbf{W} \cdot \vec{\text{in}}_{U_2} = \mathbf{W} \cdot \vec{\text{out}}_{U_1}$$

wobei  $\vec{\text{net}}_{U_2} = (\text{net}_{u_1}, \dots, \text{net}_{u_n})^\top$  und  $\vec{\text{in}}_{U_2} = \vec{\text{out}}_{U_1} = (\text{out}_{v_1}, \dots, \text{out}_{v_m})^\top$ .



# Mehrschichtige Perzeptren: Biimplikation

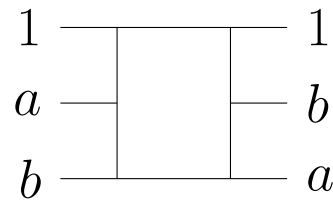
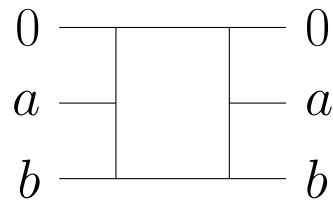
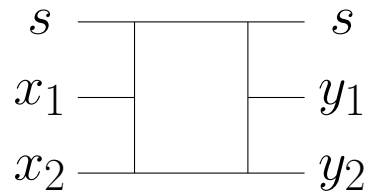
Lösen des Biimplikationsproblems mit einem MLP.



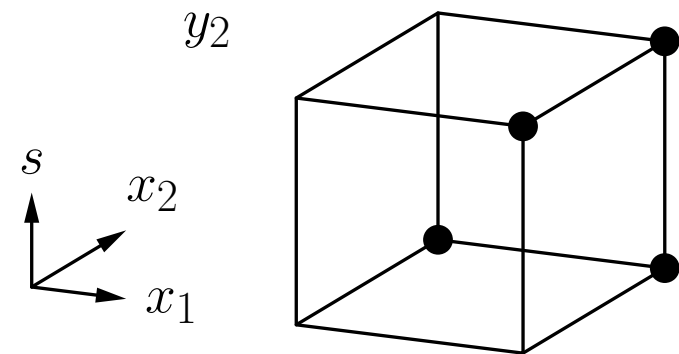
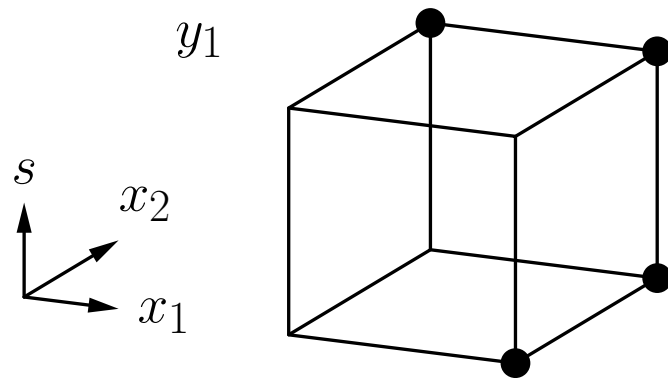
Man beachte die zusätzlichen Eingabeneuronen im Vergleich zur Lösung mit Schwellenwertelementen.

$$\mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}$$

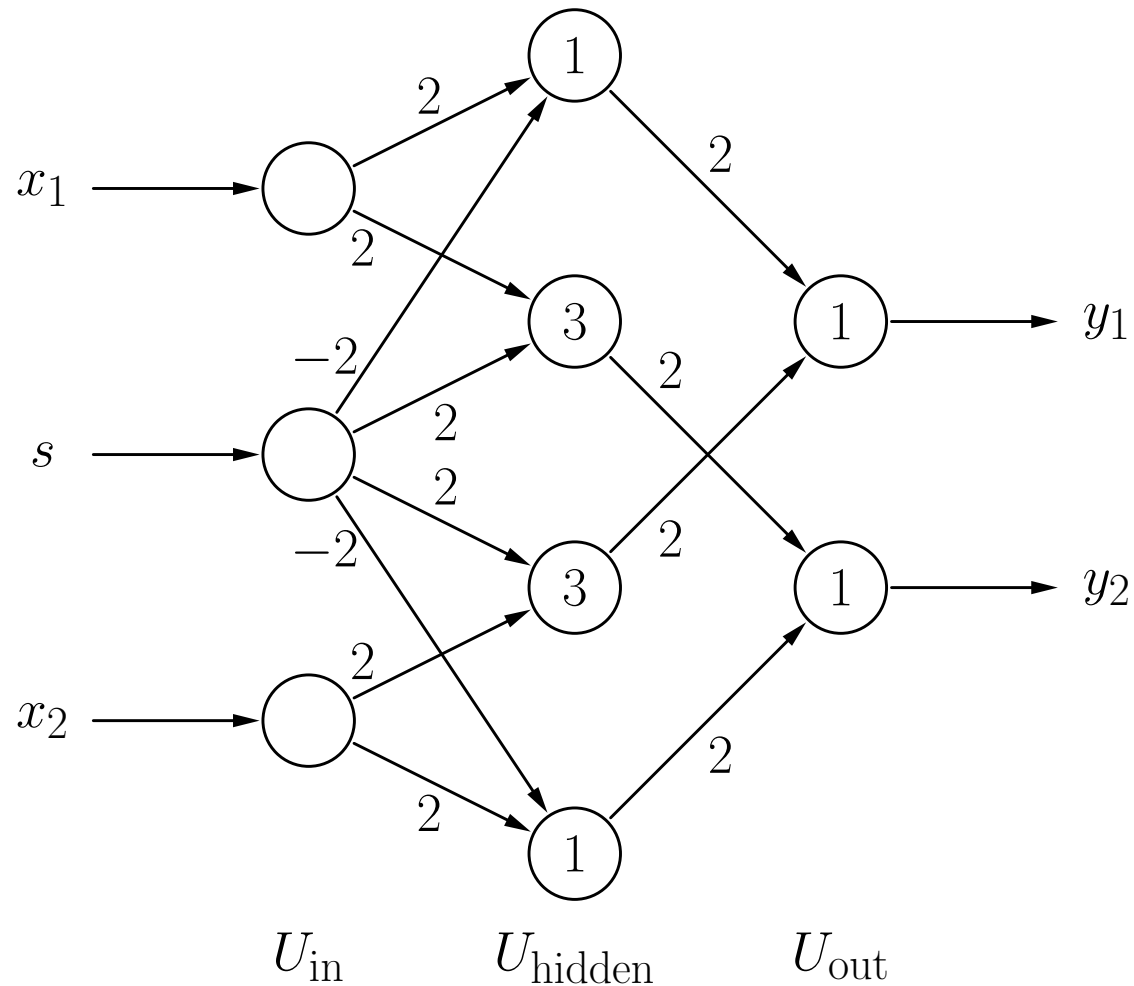
# Mehrschichtige Perzeptren: Fredkin-Gatter



$s$	0	0	0	0	1	1	1	1
$x_1$	0	0	1	1	0	0	1	1
$x_2$	0	1	0	1	0	1	0	1
$y_1$	0	0	1	1	0	1	0	1
$y_2$	0	1	0	1	0	0	1	1



# Mehrschichtige Perzeptren: Fredkin-Gatter



$$\mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

# Warum nicht-lineare Aktivierungsfunktionen?

In Matrixschreibweise ergibt sich für zwei aufeinanderfolgende Schichten  $U_1$  und  $U_2$

$$\vec{\text{net}}_{U_2} = \mathbf{W} \cdot \vec{\text{in}}_{U_2} = \mathbf{W} \cdot \vec{\text{out}}_{U_1}.$$

Wenn die Aktivierungsfunktionen linear sind, d.h.

$$f_{\text{act}}(\text{net}, \theta) = \alpha \text{net} - \theta.$$

können die Aktivierungen der Neuronen in der Schicht  $U_2$  wie folgt berechnet werden:

$$\vec{\text{act}}_{U_2} = \mathbf{D}_{\text{act}} \cdot \vec{\text{net}}_{U_2} - \vec{\theta},$$

wobei

$\vec{\text{act}}_{U_2} = (\text{act}_{u_1}, \dots, \text{act}_{u_n})^\top$  der Aktivierungsvektor ist,

$\mathbf{D}_{\text{act}}$  eine  $n \times n$  Diagonalmatrix aus den Faktoren  $\alpha_{u_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ist und

$\vec{\theta} = (\theta_{u_1}, \dots, \theta_{u_n})^\top$  der Bias-Vektor ist.

# Warum nicht-lineare Aktivierungsfunktionen?

Falls die Ausgabefunktion auch linear ist, gilt analog

$$\vec{\text{out}}_{U_2} = \mathbf{D}_{\text{out}} \cdot \vec{\text{act}}_{U_2} - \vec{\xi},$$

wobei

$\vec{\text{out}}_{U_2} = (\text{out}_{u_1}, \dots, \text{out}_{u_n})^\top$  der Ausgabevektor ist,

$\mathbf{D}_{\text{out}}$  wiederum eine  $n \times n$  Diagonalmatrix aus Faktoren ist und

$\vec{\xi} = (\xi_{u_1}, \dots, \xi_{u_n})^\top$  ein Biasvektor ist.

In Kombination ergibt sich

$$\vec{\text{out}}_{U_2} = \mathbf{D}_{\text{out}} \cdot \left( \mathbf{D}_{\text{act}} \cdot \left( \mathbf{W} \cdot \vec{\text{out}}_{U_1} \right) - \vec{\theta} \right) - \vec{\xi}$$

und daher

$$\vec{\text{out}}_{U_2} = \mathbf{A}_{12} \cdot \vec{\text{out}}_{U_1} + \vec{b}_{12}$$

mit einer  $n \times m$ -Matrix  $\mathbf{A}_{12}$  und einem  $n$ -dimensionalen Vektor  $\vec{b}_{12}$ .

# Warum nicht-lineare Aktivierungsfunktionen?

Daher ergibt sich

$$\vec{\text{out}}_{U_2} = \mathbf{A}_{12} \cdot \vec{\text{out}}_{U_1} + \vec{b}_{12}$$

und

$$\vec{\text{out}}_{U_3} = \mathbf{A}_{23} \cdot \vec{\text{out}}_{U_2} + \vec{b}_{23}$$

für die Berechnungen zwei aufeinanderfolgender Schichten  $U_2$  und  $U_3$ .

Diese beiden Berechnungen können kombiniert werden zu

$$\vec{\text{out}}_{U_3} = \mathbf{A}_{13} \cdot \vec{\text{out}}_{U_1} + \vec{b}_{13},$$

wobei  $\mathbf{A}_{13} = \mathbf{A}_{23} \cdot \mathbf{A}_{12}$  und  $\vec{b}_{13} = \mathbf{A}_{23} \cdot \vec{b}_{12} + \vec{b}_{23}$ .

**Ergebnis:** Mit linearen Aktivierungs- und Ausgabefunktionen können beliebige mehrschichtige Perzeptren auf zweischichtige Perzeptren reduziert werden.

# Mehrschichtige Perzeptren: Funktionsapproximation

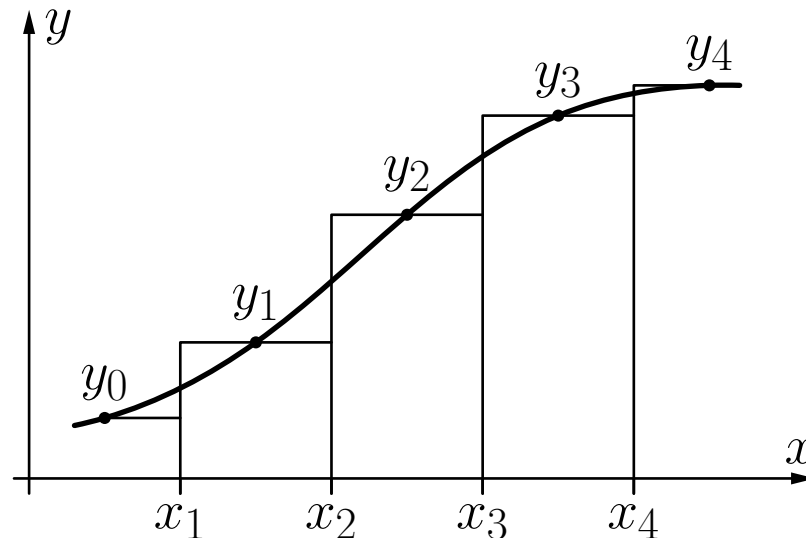
bisher: Erlernen von Boole'schen Funktionen  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$

nun: Erlernen von reellwertigen Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

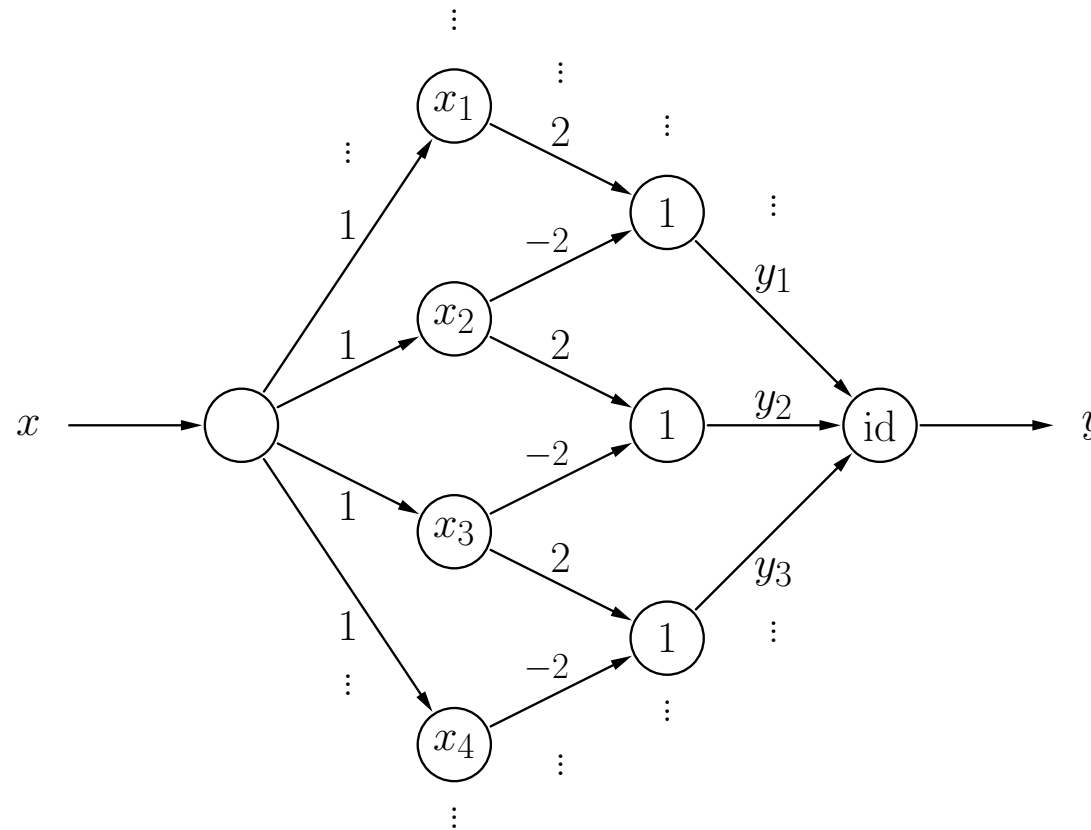
## Idee der Funktionsapproximation

Nähere eine gegebene Funktion durch eine Stufenfunktion an.

Konstruiere ein neuronales Netz, das die Stufenfunktion berechnet.



# Mehrschichtige Perzeptren: Funktionsapproximation



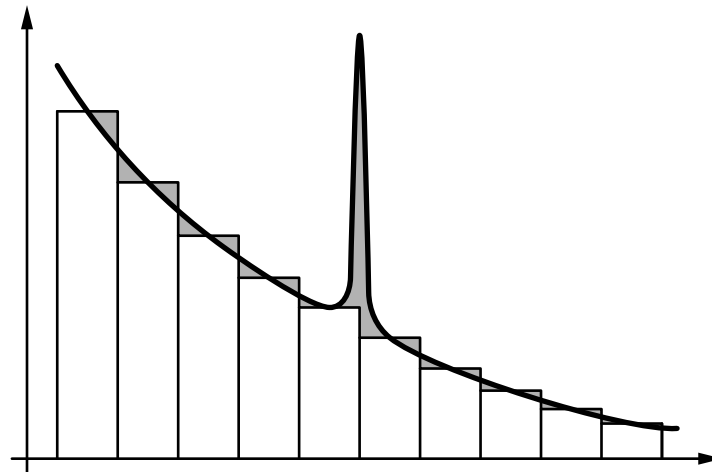
Ein neuronales Netz, das die Treppenfunktion von der vorherigen Folie berechnet. Es ist immer nur eine Stufe passend zum Eingabewert aktiv und die Stufenhöhe wird ausgegeben. Das Ausgabeneuron ist kein Schwellenwertelement: Seine Ausgabe ist die Identität der Neuroneingaben.



# Mehrschichtige Perzeptren: Funktionsapproximation

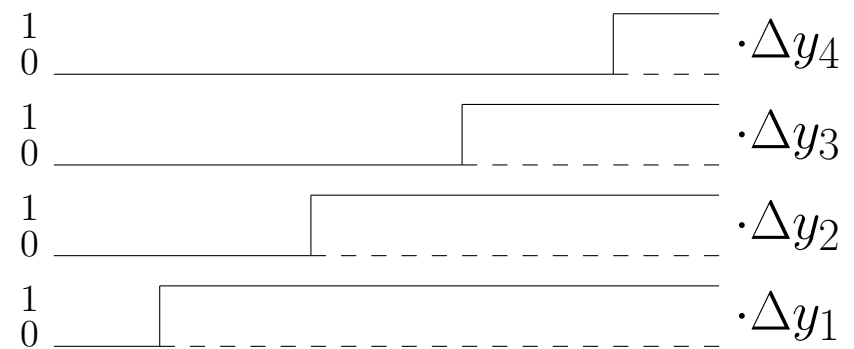
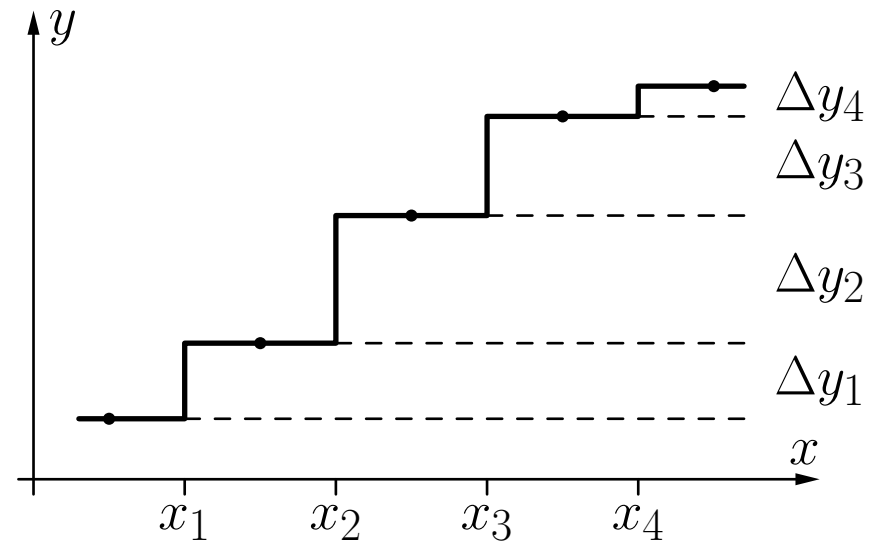
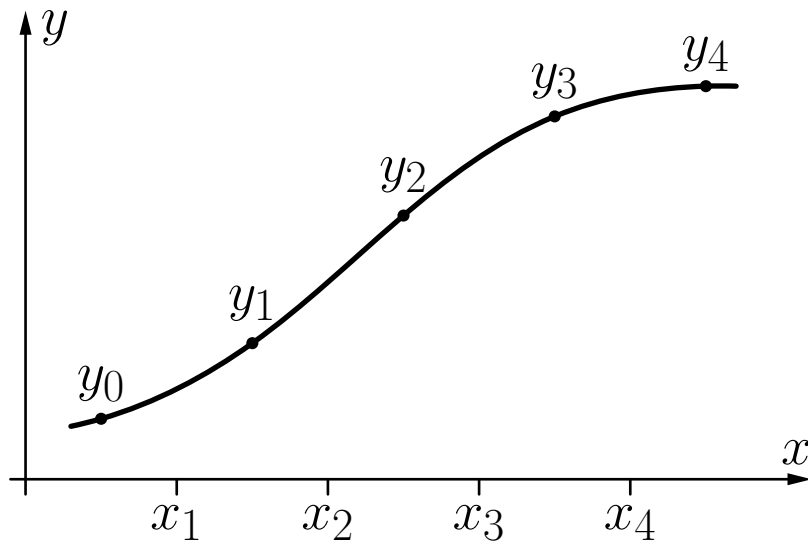
**Theorem:** Jede Riemann-integrierbare Funktion kann mit beliebiger Genauigkeit durch ein vierschichtiges MLP berechnet werden.

Aber: Fehler wird bestimmt als die **Fläche** zwischen Funktionen.

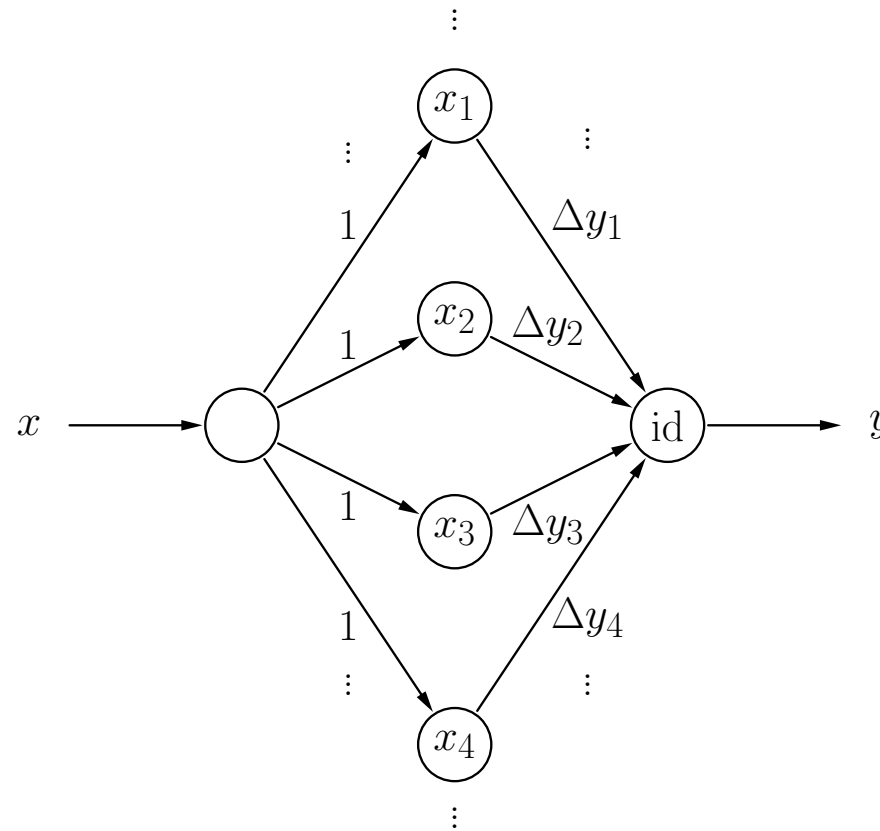


Weitere mathematische Untersuchungen zeigen, dass sogar gilt: Mit einem dreischichtigen Perzeptron kann jede stetige Funktion mit beliebiger Genauigkeit angenähert werden (Fehlerbestimmung: maximale Differenz der Funktionswerte).

# Mehrschichtige Perzeptren: Funktionsapproximation

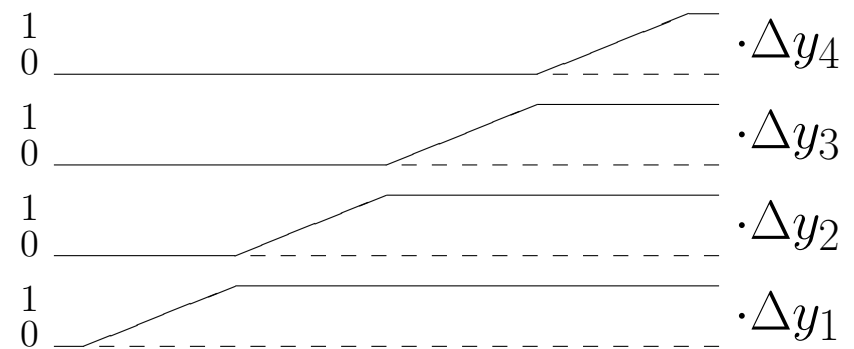
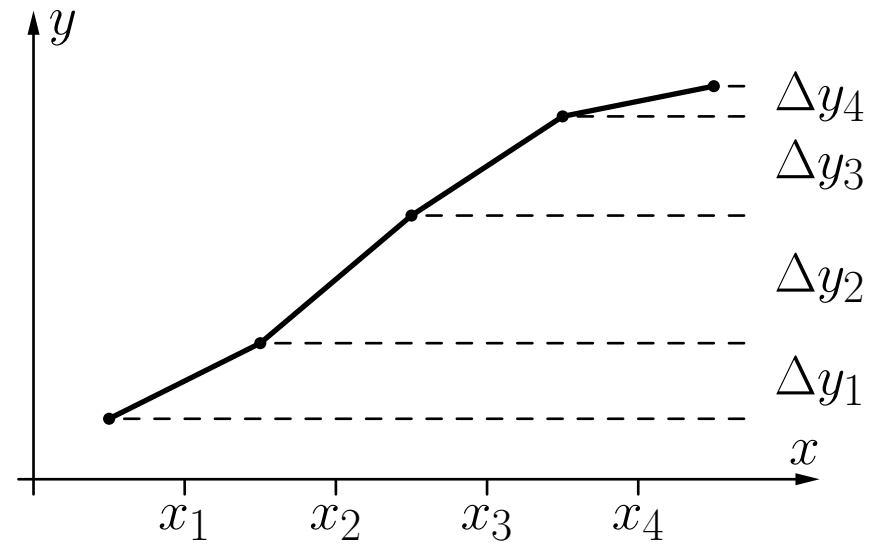
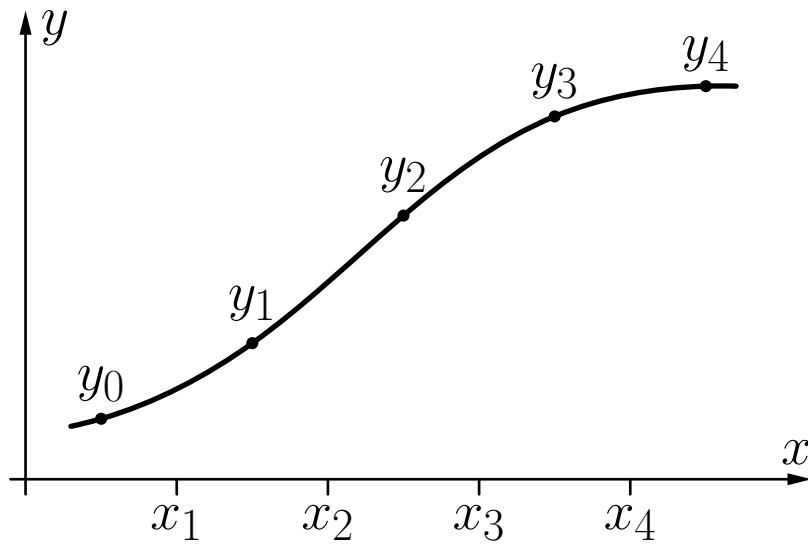


# Mehrschichtige Perzeptren: Funktionsapproximation

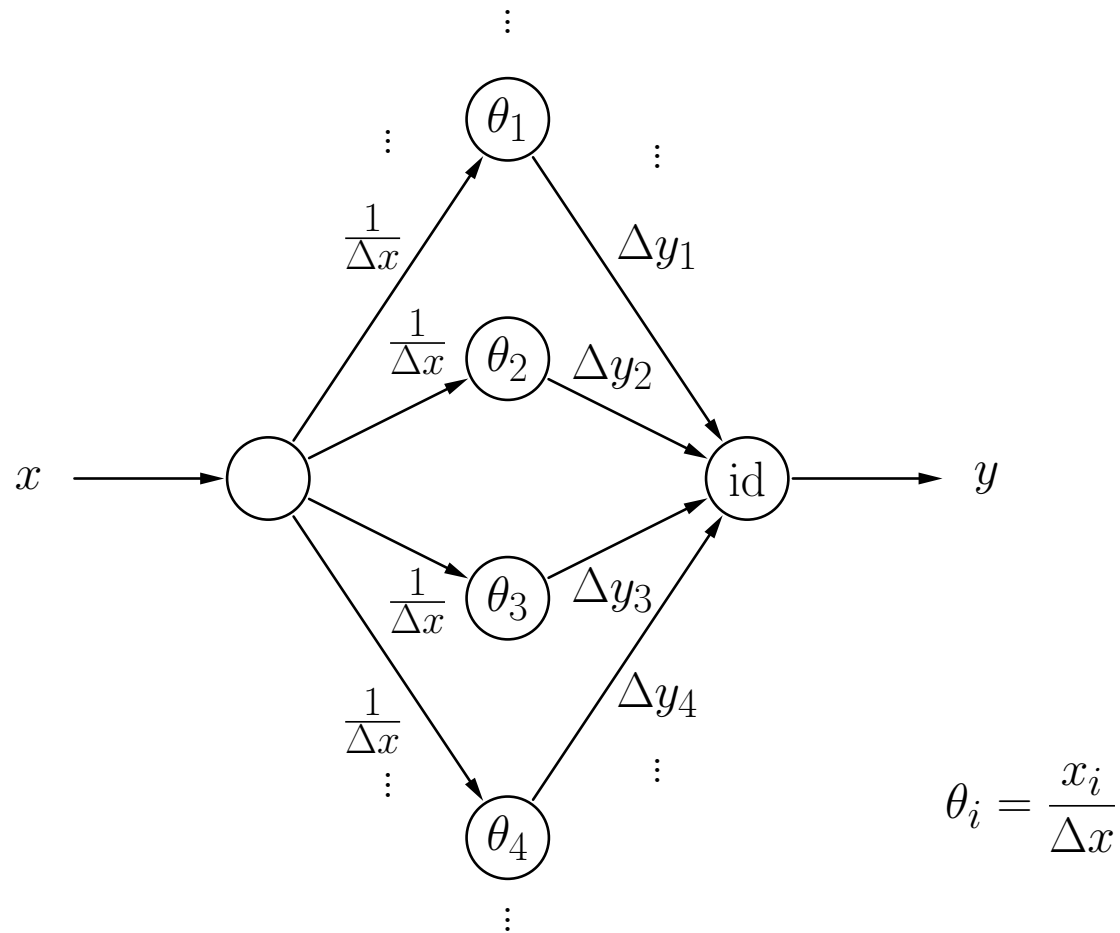


Ein neuronales Netz, das die Treppenfunktion von der vorherigen Folie als gewichtete Summe von Sprungfunktionen berechnet.

# Mehrschichtige Perzeptren: Funktionsapproximation



# Mehrschichtige Perzeptren: Funktionsapproximation



Ein neuronales Netz, das die stückweise lineare Funktion von der vorherigen Folie durch eine gewichtete Summe von semi-linearen Funktionen berechnet, wobei  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ .

# Mathematischer Hintergrund: Regression

## Das Trainieren von NN ist stark verwandt mit Regression

- Geg:
- Ein Datensatz  $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$  aus  $n$  Daten-Tupeln und
  - Hypothese über den funktionellen Zusammenhang, also z.B.  $y = g(x) = a + bx$ .

Idee: Minimiere die Summe der quadrierten Fehler, d.h.

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^n (g(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i)^2.$$

Notwendige Bedingungen für ein Minimum:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2(a + bx_i - y_i) = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2(a + bx_i - y_i)x_i = 0$$

# Mathematischer Hintergrund: Lineare Regression

Resultat der notwendigen Bedingungen: System sogenannter **Normalgleichungen**, d.h.

$$na + \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) b = \sum_{i=1}^n y_i,$$
$$\left( \sum_{i=1}^n x_i \right) a + \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Zwei lineare Gleichungen für zwei Unbekannte  $a$  und  $b$ .

System kann mit Standardmethoden der linearen Algebra gelöst werden.

Die Lösung ist eindeutig, falls nicht alle  $x$ -Werte identisch sind.

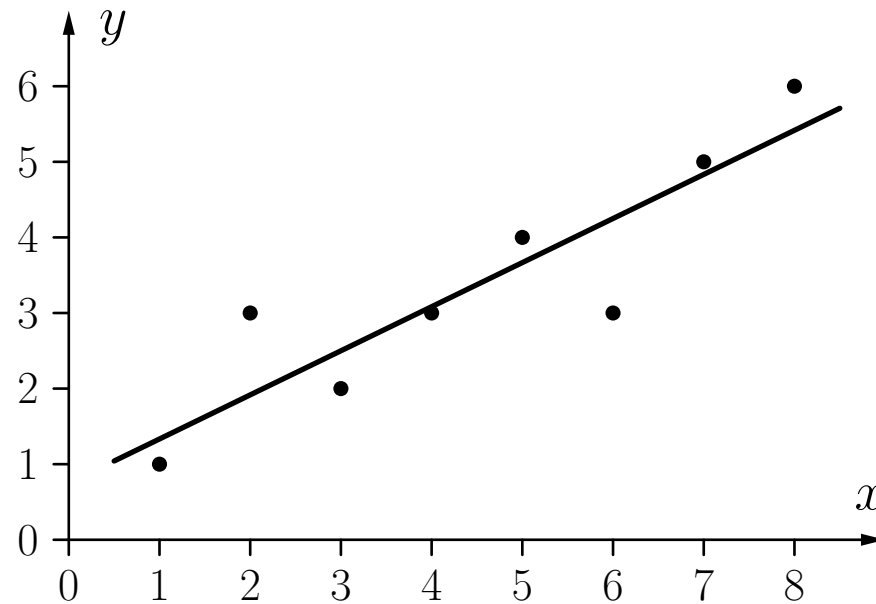
Die errechnete Gerade nennt man **Regressionsgerade**.



# Lineare Regression: Beispiel

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8
$y$	1	3	2	3	4	3	5	6

$$y = \frac{3}{4} + \frac{7}{12}x.$$



## Generalisierung auf Polynome

$$y = p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$$

Idee: Minimiere die Summe der quadrierten Fehler, d.h.

$$F(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n (p(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1x_i + \dots + a_mx_i^m - y_i)^2$$

Notwendige Bedingungen für ein Minimum: Alle partiellen Ableitungen verschwinden, d.h.

$$\frac{\partial F}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial a_m} = 0.$$

## System von Normalgleichungen für Polynome

$$\begin{aligned} na_0 + \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) a_1 + \dots + \left( \sum_{i=1}^n x_i^m \right) a_m &= \sum_{i=1}^n y_i \\ \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) a_0 + \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a_1 + \dots + \left( \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} \right) a_m &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \vdots & \\ \left( \sum_{i=1}^n x_i^m \right) a_0 + \left( \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} \right) a_1 + \dots + \left( \sum_{i=1}^n x_i^{2m} \right) a_m &= \sum_{i=1}^n x_i^m y_i, \end{aligned}$$

$m + 1$  lineare Gleichungen für  $m + 1$  Unbekannte  $a_0, \dots, a_m$ .

System kann mit Standardmethoden der linearen Algebra gelöst werden.

Die Lösung ist eindeutig, falls nicht alle  $x$ -Werte identisch sind.

## Generalisierung auf mehr als ein Argument

$$z = f(x, y) = a + bx + cy$$

Idee: Minimiere die Summe der quadrierten Fehler, d.h.

$$F(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (f(x_i, y_i) - z_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a + bx_i + cy_i - z_i)^2$$

Notwendige Bedingungen für ein Minimum: Alle partiellen Ableitungen verschwinden, d.h.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial a} &= \sum_{i=1}^n 2(a + bx_i + cy_i - z_i) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial b} &= \sum_{i=1}^n 2(a + bx_i + cy_i - z_i)x_i = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial c} &= \sum_{i=1}^n 2(a + bx_i + cy_i - z_i)y_i = 0.\end{aligned}$$

## System von Normalgleichungen für mehrere Argumente

$$\begin{aligned}na + \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) b + \left( \sum_{i=1}^n y_i \right) c &= \sum_{i=1}^n z_i \\ \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) a + \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) b + \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) c &= \sum_{i=1}^n z_i x_i \\ \left( \sum_{i=1}^n y_i \right) a + \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) b + \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) c &= \sum_{i=1}^n z_i y_i\end{aligned}$$

3 lineare Gleichungen für 3 Unbekannte  $a$ ,  $b$  und  $c$ .

System kann mit Standardmethoden der linearen Algebra gelöst werden.

Die Lösung ist eindeutig, falls nicht alle  $x$ -Werte oder alle  $y$ -Werte identisch sind.

## Allgemeiner multilinearer Fall:

$$y = f(x_1, \dots, x_m) = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k x_k$$

Idee: Minimiere die Summe der quadrierten Fehler, d.h.

$$F(\vec{a}) = (\mathbf{X}\vec{a} - \vec{y})^\top (\mathbf{X}\vec{a} - \vec{y}),$$

wobei

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{m1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Notwendige Bedingungen für ein Minimum:

$$\nabla_{\vec{a}} F(\vec{a}) = \nabla_{\vec{a}} (\mathbf{X}\vec{a} - \vec{y})^\top (\mathbf{X}\vec{a} - \vec{y}) = \vec{0}$$

# Multilineare Regression

$\nabla_{\vec{a}} F(\vec{a})$  kann einfach berechnet werden mit der Überlegung, dass der Nabla-Operator

$$\nabla_{\vec{a}} = \left( \frac{\partial}{\partial a_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial a_m} \right)$$

sich formell wie ein Vektor verhält, der mit der Summe der quadrierten Fehler “multipliziert” wird.

Alternativ kann man die Differentiation komponentenweise beschreiben.

Mit der vorherigen Methode bekommen wir für die Ableitung:

$$\begin{aligned} & \nabla_{\vec{a}} (\mathbf{X}\vec{a} - \vec{y})^\top (\mathbf{X}\vec{a} - \vec{y}) \\ &= (\nabla_{\vec{a}} (\mathbf{X}\vec{a} - \vec{y}))^\top (\mathbf{X}\vec{a} - \vec{y}) + ((\mathbf{X}\vec{a} - \vec{y})^\top (\nabla_{\vec{a}} (\mathbf{X}\vec{a} - \vec{y})))^\top \\ &= (\nabla_{\vec{a}} (\mathbf{X}\vec{a} - \vec{y}))^\top (\mathbf{X}\vec{a} - \vec{y}) + (\nabla_{\vec{a}} (\mathbf{X}\vec{a} - \vec{y}))^\top (\mathbf{X}\vec{a} - \vec{y}) \\ &= 2\mathbf{X}^\top (\mathbf{X}\vec{a} - \vec{y}) \\ &= 2\mathbf{X}^\top \mathbf{X}\vec{a} - 2\mathbf{X}^\top \vec{y} = \vec{0} \end{aligned}$$

# Multilineare Regression

Einige Regeln für Vektor-/Matrixberechnung und Ableitungen:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top &= \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top & \nabla_{\vec{z}} f(\vec{z}) \mathbf{A} &= (\nabla_{\vec{z}} f(\vec{z})) \mathbf{A} \\ (\mathbf{A} \mathbf{B})^\top &= \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top & \nabla_{\vec{z}} (f(\vec{z}))^\top &= (\nabla_{\vec{z}} f(\vec{z}))^\top \\ \nabla_{\vec{z}} \mathbf{A} \vec{z} &= \mathbf{A} & \nabla_{\vec{z}} f(\vec{z}) g(\vec{z}) &= (\nabla_{\vec{z}} f(\vec{z})) g(\vec{z}) + f(\vec{z}) (\nabla_{\vec{z}} g(\vec{z}))^\top\end{aligned}$$

Ableitung der zu minimierenden Funktion:

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{a}} F(\vec{a}) &= \nabla_{\vec{a}} (\mathbf{X} \vec{a} - \vec{y})^\top (\mathbf{X} \vec{a} - \vec{y}) \\ &= \nabla_{\vec{a}} ((\mathbf{X} \vec{a})^\top - \vec{y}^\top) (\mathbf{X} \vec{a} - \vec{y}) \\ &= \nabla_{\vec{a}} ((\mathbf{X} \vec{a})^\top \mathbf{X} \vec{a} - (\mathbf{X} \vec{a})^\top \vec{y} - \vec{y}^\top \mathbf{X} \vec{a} + \vec{y}^\top \vec{y}) \\ &= \nabla_{\vec{a}} (\mathbf{X} \vec{a})^\top \mathbf{X} \vec{a} - \nabla_{\vec{a}} (\mathbf{X} \vec{a})^\top \vec{y} - \nabla_{\vec{a}} \vec{y}^\top \mathbf{X} \vec{a} + \nabla_{\vec{a}} \vec{y}^\top \vec{y} \\ &= (\nabla_{\vec{a}} (\mathbf{X} \vec{a})^\top) \mathbf{X} \vec{a} + ((\mathbf{X} \vec{a})^\top (\nabla_{\vec{a}} \mathbf{X} \vec{a}))^\top - 2 \nabla_{\vec{a}} (\mathbf{X} \vec{a})^\top \vec{y} \\ &= ((\nabla_{\vec{a}} \mathbf{X} \vec{a})^\top) \mathbf{X} \vec{a} + (\nabla_{\vec{a}} \mathbf{X} \vec{a})^\top \mathbf{X} \vec{a} - 2 (\nabla_{\vec{a}} (\mathbf{X} \vec{a})^\top) \vec{y} \\ &= 2 (\nabla_{\vec{a}} \mathbf{X} \vec{a})^\top \mathbf{X} \vec{a} - 2 (\nabla_{\vec{a}} \mathbf{X} \vec{a})^\top \vec{y} \\ &= 2 \mathbf{X}^\top \mathbf{X} \vec{a} - 2 \mathbf{X}^\top \vec{y}\end{aligned}$$



# Multilineare Regression

Notwendige Bedingungen für ein Minimum also:

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{a}} F(\vec{a}) &= \nabla_{\vec{a}} (\mathbf{X}\vec{a} - \vec{y})^\top (\mathbf{X}\vec{a} - \vec{y}) \\ &= 2\mathbf{X}^\top \mathbf{X}\vec{a} - 2\mathbf{X}^\top \vec{y} \stackrel{!}{=} \vec{0}\end{aligned}$$

Als Ergebnis bekommen wir das System von **Normalgleichungen**:

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{X}\vec{a} = \mathbf{X}^\top \vec{y}$$

Dieses System hat eine Lösung, falls  $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$  nicht singulär ist. Dann ergibt sich

$$\vec{a} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \vec{y}.$$

$(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top$  wird die (Moore-Penrose-) **Pseudoinverse** der Matrix  $\mathbf{X}$  genannt.

Mit der Matrix-Vektor-Repräsentation des Regressionsproblems ist die Erweiterung auf **Multipolynomiale Regression** naheliegend:

Addiere die gewünschten Produkte zur Matrix  $\mathbf{X}$ .

## Generalisierung auf nicht-polynomiale Funktionen

Einfaches Beispiel:  $y = ax^b$

Idee: Finde Transformation zum linearen/polynomiellen Fall.

Transformation z.B.:  $\ln y = \ln a + b \cdot \ln x$ .

## Spezialfall: **logistische Funktion**

$$y = \frac{Y}{1 + e^{a+bx}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} = \frac{1 + e^{a+bx}}{Y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Y - y}{y} = e^{a+bx}.$$

Ergebnis: Wende sogenannte **Logit-Transformation** an:

$$\ln \left( \frac{Y - y}{y} \right) = a + bx.$$

# Logistische Regression: Beispiel

$x$	1	2	3	4	5
$y$	0.4	1.0	3.0	5.0	5.6

Transformiere die Daten mit

$$z = \ln \left( \frac{Y - y}{y} \right), \quad Y = 6.$$

Die transformierten Datenpunkte sind

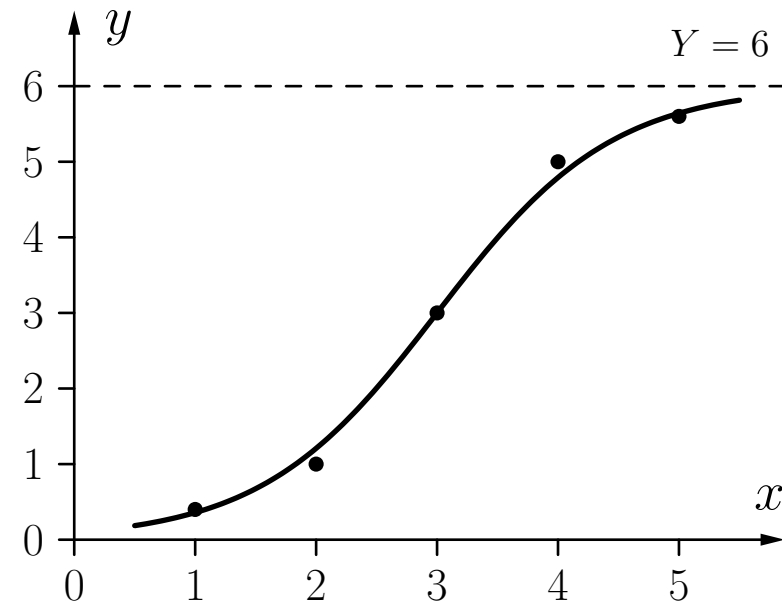
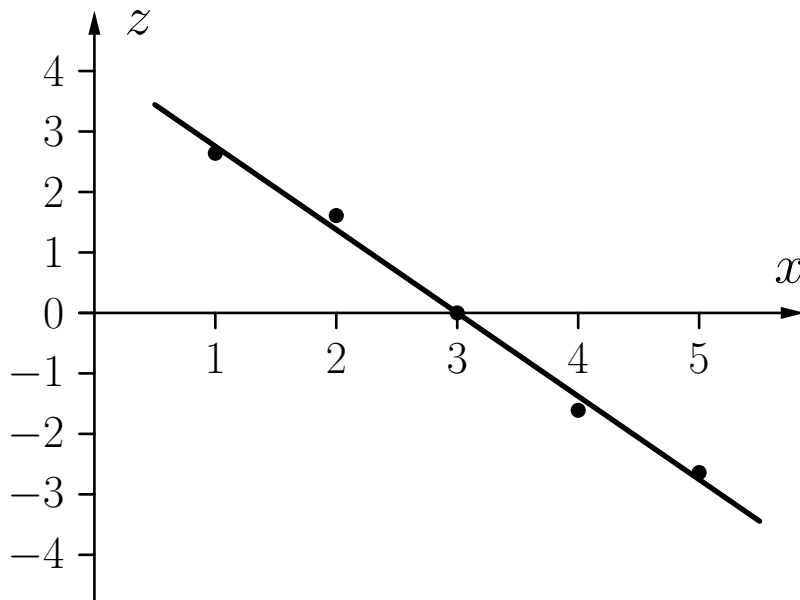
$x$	1	2	3	4	5
$z$	2.64	1.61	0.00	-1.61	-2.64

Die sich ergebende Regressionsgerade ist

$$z \approx -1.3775x + 4.133.$$

Somit lautet die Rücktransformation  $y = \frac{6}{1 + e^{-1.3775x + 4.133}}$ .

# Logistische Regression: Beispiel



Die logistische Regressionsfunktion kann von einem einzelnen Neuron mit

Netzeingabefunktion  $f_{\text{net}}(x) \equiv wx$  mit  $w \approx -1.3775$ ,

Aktivierungsfunktion  $f_{\text{act}}(\text{net}, \theta) \equiv (1 + e^{-(\text{net} - \theta)})^{-1}$  mit  $\theta \approx 4.133$  und

Ausgabefunktion  $f_{\text{out}}(\text{act}) \equiv 6 \text{ act}$   
berechnet werden.