10. Übungsblatt

Aufgabe 38 Hopfield-Netze: Mustererkennung

In einem Hopfield-Netz mit vier Neuronen sollen die beiden Muster $(-1, +1, -1, +1)$ und $(+1, -1, -1, +1)$ gespeichert werden, d.h., diese Muster sollen stabile Zustände des Netzes sein, die durch eine Aktualisierung beliebiger Neuronen nicht verlassen werden.

a) Berechnen Sie die Verbindungsgewichte und die Schwellenwerte der Neuronen eines Hopfield-Netzes, das die genannten Muster speichert!

b) Wie viele weitere Muster können in diesem Netz noch gespeichert werden?

c) Finden Sie zwei weitere Muster, die man zusätzlich in dem von Ihnen konstruierten Netz speichern könnte, ohne dass die alten Muster vergessen werden!
(Um diese Muster tatsächlich zu speichern, müssen natürlich eventuell die Verbindungsgewichte geändert werden.)

Aufgabe 39 Hopfield-Netze: Lösen von Optimierungsproblemen

Gegeben sei eine Folge $F = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ganzer Zahlen. Wir nehmen vereinfachend an, dass mindestens eine dieser Zahlen nicht negativ ist. Gesucht ist die maximale Teilsumme dieser Folge, d.h. das Maximum der Summen von Teilfolgen der Folge F, wobei wir unter einer Teilfolge der Folge F eine Folge $F_{ij} = (a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j)$ mit $1 \leq i \leq j \leq n$ verstehen. Wir suchen also

$$\mathrm{mts}(F) = \max_{1 \leq i \leq j \leq n} \sum_{k=i}^{j} a_k.$$

Konstruieren Sie ein Hopfield-Netz zur Lösung dieses Optimierungsproblems!

Hinweis: Sie müssen eine geeignete Energiefunktion finden.

Aufgabe 40 Vapnik-Chervonenkis-Dimension

a) Informieren Sie sich über die Vapnik-Chervonenkis-Dimension (VC-Dimension). Was besagt diese Größe und warum spielt sie für das Erlernen einer Funktion aus Datenpunkten (z.B. durch ein neuronales Netz) eine Rolle?

b) Wie groß ist die VC-Dimension einer Hyperebene im Raum $\mathbb{R}^n$? Verdeutlichen Sie Ihre Überlegungen mit Beispielen für $n = 2$.

c) Die Indikatorfunktion $I(f(x))$ ist definiert als 1, falls $f(x) > 0$, und -1 sonst. Zeigen Sie, dass die Menge der Funktionen $\{I(\sin(\alpha x) > 0)\}$ die folgenden Punkte im eindimensionalen Raum für beliebige l trennen kann:

$$z_1 = 10^{-1}, \ldots, z_l = 10^{-l}.$$

Das heißt, zeigen Sie, dass die VC-Dimension dieser Klasse von Funktionen unendlich ist. Hinweis: Es genügt dazu

$$\alpha = \pi(1 + \sum_{i=1}^{l} \frac{(1 - y_i)10^i}{2})$$

geschickt zu wählen und zu zeigen, dass für beliebige $l \in \mathrm{N}$ und beliebige Labels

$$y_k \in \{-1, 1\}, \forall 1 \leq k \leq l$$

die Indikatorfunktion das gewünschte Label liefert.

Aufgabe 41 SVM / Optimaler Hyperebenenklassifikator

a) Erklären sie den Begriff Support-Vektoren. Visualisieren Sie diese anhand eines selbstgewählten Beispiels.

b) In der Vorlesung wird gezeigt, dass die Optimierung eines Hyperebeneklassifikators durch folgenden Lagrange-Term dargestellt werden kann:

$$L(w, b, \alpha) = ||w|| - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(y_i(\langle w, x_i \rangle + b) - 1)$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Lösung des Optimierungsproblems das die optimale Hyperebene nurnoch von den Supportvektoren abhängig ist.

Hinweis: Nutzen Sie den in der Vorlesung vorgestellten Ansatz der dualen Repräsentation des Optimierungsproblems.

Aufgabe 42 Kernel-Trick

a) Informieren Sie sich über den sogenannten Kernel-Trick. Was besagt er und wo kommt er zum Einsatz?

b) Wie kann das Optimierungsproblem einer linearen SVM angepasst werden, um auch nichtlineare Lösungen zu finden?