Neuronale Netze SS 2009

Prof. Dr. R. Kruse, G. Ruß

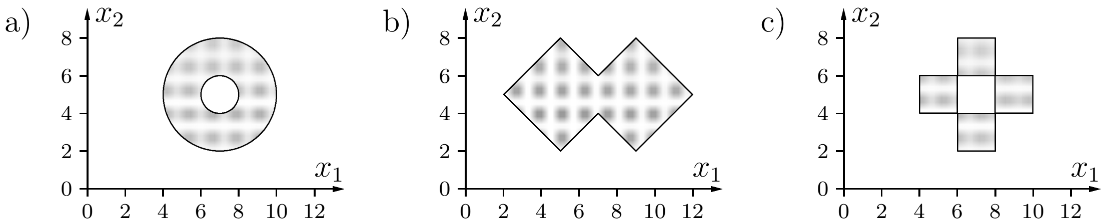
6. Übungsblatt

Aufgabe 22 Radiale-Basis-Funktionen-Netze

Bestimmen Sie die Parameter (Gewichte $\vec{w}_u$ und Radien σ_u) von Radiale-Basisfunktionen-Netzen mit der Aktivierungsfunktion

$$f_{\text{act}}^{(u)}(\underset{u}{\text{net}}, \sigma_u) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \text{net}_u \le \sigma_u, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für die Neuronen der versteckten Schicht, die für Punkte innerhalb der grauen Flächen, die in den unten gezeigten Diagrammen dargestellt sind, den Wert 1 und für Punkte außerhalb den Wert 0 liefern! Ob die Netze für Punkte auf den Rändern der Flächen den Wert 0 oder den Wert 1 liefern, ist gleichgültig. Sie sollten jedoch sicherstellen, daß für alle Punkte der x_1-x_2-Ebene *ausschließlich* die Werte 0 oder 1 ausgegeben werden.



Aufgabe 23 Radiale-Basis-Funktionen-Netze

Geben Sie ein Radiale-Basisfunktionen-Netz mit ca. 10 Neuronen an, das die Funktion $y = \sin(x)$ im Intervall $[0, \pi]$ durch eine Treppenfunktion annähert. Wie kann man diese Näherung verbessern?

Aufgabe 24 Radiale-Basis-Funktionen-Netze

a)

Betrachten Sie ein Radiale-Basisfunktionen-Netz mit n Eingabeneuronen, zwei versteckten Neuronen u_1 und u_2 und einem Ausgabeneuron u_{out}. Die versteckten Neuronen verwenden den Euklidischen Abstand als Netzeingabefunktion und die Gaußfunktion $f_{\text{act}}(\text{net}, \sigma) = e^{-\frac{\text{net}^2}{2\sigma^2}}$ als Aktivierungsfunktion. Die Aktivierungsfunktion des Ausgabeneurons sei die Schwellenwertfunktion, und die Gewichte von der versteckten Schicht zur Ausgabeschicht seien +1 und −1, d.h. es gelte:

$$out = \begin{cases} 1, & \text{falls } w_{u_{out}u_1} u_1 + w_{u_{out}u_2} u_2 \ge \theta_{u_{out}} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (1)$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{falls } u_1 \ge u_2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2)$$

Zeigen Sie, daß die Ausdrucksmächtigkeit eines solchen Radiale-Basisfunktionen-Netzes der eines Schwellenwertelements entspricht, wenn Sie bei versteckten Neuronen denselben Radius σ verwenden.

b)

Die Verbindungsgewichte zur versteckten Schicht (d.h. die Zentren der radialen Basisfunktionen) seien $\vec{w}_1 = (1, 2)$ und $\vec{w}_2 = (7, 4)$. Gegeben seien die folgenden Punkte: $\vec{(p)}_1 = (2, 4)$, $\vec{(p)}_2 = (2.5, 2.5)$ und $\vec{(p)}_3 = (3, 1)$. $\vec{(p)}_1$ und $\vec{(p)}_3$ sollen als Ausgabe den Wert 0, $\vec{(p)}_2$ den Wert 1 liefern. Wie müssen Sie die Radien verändern, um das zu erreichen? Können Sie diese Trennung auch durch eine Veränderung der Gewichte zwischen versteckter und Ausgabeschicht darstellen?

Aufgabe 25 Radiale-Basis-Funktionen-Netze

Die Bestimmung der Gewichte der Verbindungen von den Eingabeneuronen zu den Neuronen der versteckten Schicht — also die Bestimmung der Zentren der radialen Basisfunktionen — und die Bestimmung der Radien gehören zu den Hauptproblemen des Lernens von Radiale-Basisfunktionen-Netzen. Bei Klassifikationsaufgaben verwendet man manchmal statistische Schätzfunktionen, um geeignete (Startwerte für die) Zentren und Radien zu berechnen, jedenfalls dann, wenn zu erwarten ist, daß eine radiale Basisfunktion je Klasse ausreicht. Man faßt dazu die radiale Basisfunktion als skalierte Wahrscheinlichkeitsdichte auf und bestimmt den Erwartungswert und die Standardabweichung der Verteilung z.B. mit einer Maximum-Likelihood-Schätzung.

Als Beispiel betrachten wir ein Radiale-Basisfunktionen-Netz mit zwei Eingängen, zwei versteckten Neuronen und zwei Ausgabeneuronen, das den rechts gezeigten Datensatz klassifizieren soll. Die versteckten Neuronen mögen den Euklidischen Abstand als Netzeingabefunktion und die Gaußfunktion als Aktivierungsfunktion verwenden. Bestimmen Sie geeignete Zentren $\vec{w}$ und Radien σ für die beiden Klassen mit Hilfe einer Maximum-Likelihood-Schätzung! Was müssen Sie bei der Bestimmung der Radien beachten?