Unifikation in der Prädikatenlogik

Als *Unifikation* bezeichnet man das Finden einer geeigneten Substitution (Ersetzung) σ (eines Teils) der in einer Menge von Formeln auftretenden Variablen, so daß die Formeln identisch werden (meist werden nur zwei Formeln betrachtet). Eine Substitution, die dieses leistet, nennt man auch *Unifikator*. Wir schreiben Substitutionen als

$$\sigma = [v_1 \mapsto t_1, \ldots, v_n \mapsto t_n] \qquad \text{oder} \qquad \sigma = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \\ t_1 & & t_n \end{bmatrix}.$$

Hierdurch wird ausgedrückt, daß die Variable v_1 durch den Term t_1 ersetzt wird, die Variable v_2 durch den Term t_2 usf. Man beachte, daß die Ersetzungen *nicht nacheinander* sondern *gleichzeitig* ausgeführt werden. D.h., wenn z.B.

$$\phi \equiv P(x, y) \quad \text{und} \quad \sigma \equiv \begin{bmatrix} x & y \\ f(y) & A \end{bmatrix},$$

so ist das Ergebnis

$$\sigma(\phi) \equiv P(f(y), A) \quad \text{und } \textit{nicht} \quad P(f(A), A).$$

Oft gibt es für eine gegebene Menge von Formeln mehrere Unifikatoren. Z.B. lassen sich die Formeln $P(x, f(y), B)$ und $P(x, f(B), B)$ durch die Substitution $\left[\begin{smallmatrix} x & y \\ A & B \end{smallmatrix}\right]$ und durch die Substitution $\left[\begin{smallmatrix} y \\ B \end{smallmatrix}\right]$ unifizieren: Mit der ersten Substitution werden beide Formeln in $P(A, f(B), B)$, mit der zweiten in $P(x, f(B), B)$ umgewandelt. Da die zweite Substitution „einfacher“ ist, insofern sie keine „unötigen“ Ersetzungen vornimmt, wird man sie vorziehen. Formal sucht man nach dem *allgemeinsten Unifikator*, d.h. dem Unifikator, aus dem sich alle anderen möglichen Unifikatoren durch Hinzufügen weiterer Substitutionen erzeugen lassen. Mit anderen Worten: τ ist allgemeinster Unifikator, wenn τ ein Unifikator ist und für alle anderen Unifikatoren σ gilt, daß es eine Substitution σ' gibt mit $\sigma = \tau \circ \sigma'$, wobei $(\tau \circ \sigma')(\phi) \equiv \sigma'(\tau(\phi))$, also einfach die Hintereinanderausführung der Substitutionen bedeutet.

Es gibt eine Reihe von Algorithmen, um den allgemeinsten Unifikator zu finden. Der Algorithmus aus [Chang und Lee 1973] nutzt Ausdrücke in Listenstruktur:

$$P(x, f(A, y)) \quad \text{entspricht} \quad [Px[fA\,y]],$$

wobei die eckigen Klammern Listen anzeigen, sowie die Idee der Abweichungsmenge. Die Abweichungsmenge ist eine Menge von Tupeln, die korrespondierende, aber nicht übereinstimmende Listenelemente angeben. Für

$$\{[Px[fA\,y]], [Px[fzB]]\}$$

ist $\{(A, z), (y, B)\}$ die Abweichungsmenge. Aus ihr liest man $\left[\begin{smallmatrix} z & y \\ A & B \end{smallmatrix}\right]$ als die benötigte Substitution ab. Man beachte, daß in der Listenstruktur (und folglich auch in der Abweichungsmenge) Prädikatsymbole wie Konstanten behandelt werden.

Für den folgenden Algorithmus ist es günstig, wenn man den Begriff der Substitution auf Ausdrücke in Listenstruktur überträgt. Variablen werden dann nicht durch Terme ersetzt sondern durch Listen, die diese Terme darstellen. Durch diese Übertragung ändert sich am Prinzip der Unifikation offenbar nichts.

Algorithmus zum Finden eines allgemeinsten Unifikators

Eingabe: eine Menge Γ von Ausdrücken in Listenstruktur
Ausgabe: ein allgemeinster Unifikator σ für Γ
oder: die Feststellung, daß es keinen Unifikator gibt.

1. $k := 0$, $\sigma_0 := [\,]$ (leere Substitution), $\Gamma_0 = \sigma_0(\Gamma) = \Gamma$.
2. Bestimme die Abweichungsmenge D_k von Γ_k.
3. Ist D_k leer (enthält Γ_k also nur identische Ausdrücke), so ist σ_k allgemeinster Unifikator und wird ausgegeben. [Ende]
4. Falls es in D_k ein Tupel (v_k, t_k) oder ein Tupel (t_k, v_k) gibt, so daß v_k eine Variable und t_k eine Variable, eine Konstante oder eine Liste ist, in der v_k nicht vorkommt, so gehe zu Schritt 5. Anderenfalls ist Γ_k nicht unifizierbar. [Ende]
5. $\sigma_{k+1} := \sigma_k \circ \left[\begin{smallmatrix} v_k \\ t_k \end{smallmatrix}\right]$, $\Gamma_{k+1} := \left[\begin{smallmatrix} v_k \\ t_k \end{smallmatrix}\right](\Gamma_k)$ (bzw. $\Gamma_{k+1} := \sigma_{k+1}(\Gamma)$)
6. $k := k + 1$ und gehe zu Schritt 2.

Beispiele

a) $P(A, x, f(g(y)))$ und $P(z, f(z), f(v))$:

$\sigma_0 = [\,]$ $\quad \Gamma_0 = \{[PA\,x[f[gy]]], [Pz[fz][fv]]\}$,
$D_0 = \{(A, z), (x, [fz]), ([gy], v)\}$

$\sigma_1 = \left[\begin{smallmatrix} z \\ A \end{smallmatrix}\right]$, $\quad \Gamma_1 = \{[PA\,x[f[gy]]], [PA[fA][fv]]\}$,
$D_1 = \{(x, [fA]), ([gy], v)\}$

$\sigma_2 = \left[\begin{smallmatrix} z & x \\ A & [fA] \end{smallmatrix}\right]$, $\quad \Gamma_2 = \{[PA[fA][f[gy]]], [PA[fA][fv]]\}$,
$D_2 = \{([gy], v)\}$

$\sigma_3 = \left[\begin{smallmatrix} z & x & v \\ A & [fA] & [gy] \end{smallmatrix}\right]$, $\quad \Gamma_3 = \{[PA[fA][f[gy]]], [PA[fA][f[gy]]]\}$,
$D_3 = \emptyset$

Ergebnis (in Termschreibweise): $\sigma = \left[\begin{smallmatrix} z & x & v \\ A & f(A) & g(y) \end{smallmatrix}\right]$.

b) $Q(f(A), g(x))$ und $Q(y, y)$ sind nicht unifizierbar.

Literatur

[Chang und Lee 1973] C.-L. Chang und R. C.-T. Lee. *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving.* Academic Press, New York, NY, USA 1973