Grundbegriffe der Prädikatenlogik

Unterlagen zur Vorlesung „Intelligente Systeme: Einführung“
Prof. Dr. R. Kruse, Dr. C. Borgelt

Inhaltsverzeichnis

---

1 Einleitung

J.M. Keynes beginnt seinen bekannten Aufsatz „A Treatise on Probability“ mit dem Satz [4]: „Part of our knowledge we obtain direkt; and part by argument.“ Über den ersten Teil dieses Satzes streiten sich zwar die Philosophen, doch über den zweiten ist man sich (weitgehend) einig: Wir erlangen Wissen (auch) durch Argumente, d.h. durch Schlußfolgerungen aus bekannten Tatsachen. In der Wissensverarbeitung muß man sich daher u.a. mit Argumenten und Schlußfolgerungsmechanismen befassen.

Sollen Argumente und Schlußfolgerungen der intersubjektiven Prüfung und einer sorgfältigen Analyse zugänglich gemacht werden, so müssen sie in einer Sprache formuliert werden. Die verwendete Sprache muß dazu eine bestimmte Struktur haben. *Die Logik beschreibt* nun gerade *diese Struktur argumentativer Sprachen.*

Da offenbar alle natürlichen Sprachen die notwendige Struktur besitzen, denn in allen kann man argumentieren, orientiert sich der Aufbau der Logik an der Struktur natürlicher Sprachen. Aristoteles etwa, der Begründer der klassischen Logik, orientierte sich an der griechischen Sprache. Der Einfachheit halber werden wir uns an der deutschen Sprache orientieren.

Man unterscheidet verschiedene (formale) Logiken danach, wie genau sie die Struktur natürlicher Sprachen wiedergeben, bzw. welche Aspekte dieser Struktur sie nachzubilden versuchen. Wir betrachten hier nur die Aussagenlogik und die Prädikatenlogik (wobei erstere als Einschränkung der letzteren gesehen werden kann).

In der *Aussagenlogik* (die im folgenden als i.w. bekannt vorausgesetzt wird) beschäftigt man sich — wie der Name schon sagt — mit Aussagen, d.h. mit Sätzen, die wahr oder falsch sein können. Beispiele für Aussagen sind „Peter ist 180 cm groß." oder „Der Mond besteht aus grünem Käse." Aussagen wie die vorstehenden werden als *atomar* (unteilbar) angesehen und gewöhnlich durch symbolische Variablen dargestellt, die die Werte *wahr* und *falsch* annehmen können. Aus atomaren Aussagen können, mit Hilfe sogenannter *Konnektive* oder *Junktoren* wie z.B. Negation, Konjunktion, Disjunktion etc., komplexe Aussagen zusammengesetzt werden. Beispiele sind „*Wenn* es *nicht* regnet, *dann* gehe ich spazieren." und „Holz ist leichter als Blei *und* Holz ist schwerer als Styropor." (Konnektive hervorgehoben). Die Aussagenlogik beschreibt die Wahrheitsfunktionalität zusammengesetzter Aussagen, d.h., sie beschreibt, wie sich der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage zu den Wahrheitswerten der in ihr auftretenden atomaren Aussagen verhält.

Offenbar beschreibt die Aussagenlogik die Struktur natürlicher Sprachen nur sehr grob, da sie Aussagen ohne Konnektive als atomar ansieht. In einer natürlichen Sprache bestehen aber solche Aussagen aus mehreren Teilen, die in eine bestimmte Beziehung zueinander gesetzt sind. Die Aussage „Rex ist schwarz." besteht z.B. aus drei Teilen, nämlich dem Namen „Rex", der ein Individuum bezeichnet (wir wollen annehmen, daß es sich um einen Hund handelt), der Eigenschaft „schwarz" und der Kopula „ist", durch die die Eigenschaft dem Individuum zugeschrieben wird. Andere „atomare" Aussagen sind noch komplizierter, z.B. „Alle Schwäne sind weiß." oder „Der Autor des ‚Faust' starb 1832 in Weimar."

Um diese innere Struktur von Aussagen wenigstens teilweise erfassen und in der Analyse von Argumenten ausnutzen zu können, benutzt man eine Verfeinerung der Aussagenlogik, die sogenannte *Prädikatenlogik*. Sie modelliert durch Namen („Rex") bezeichnete Individuen durch *Konstanten*, durch Kennzeichnungen bestimmte Individuen („Der Autor des ‚Faust'") durch *Funktionen*, Eigenschaften („... ist schwarz") und Relationen („x schenkt y z", etwa „Peter schenkt Sabine eine Rose.") durch *Prädikate* und All- und Existenzaussagen („Alle Schwäne ...", „Es gibt ...") durch sogenannte *Quantoren.*

Im folgenden geben wir einen formalen Aufbau der Prädikatenlogik erster Stufe (d.h. mit Quantoren über Individuen aber nicht über Funktionen oder Prädikate) an, der im wesentlichen [3] folgt. Dieser Aufbau ist nicht didaktisch aufbereitet, sondern eher als Verzeichnis zum Nachschlagen der Grundbegriffe gedacht. Verweise auf ausführlichere Darstellungen enthält das Literaturverzeichnis. Der gewählte Aufbau ist auch nicht der einzig mögliche. An gegebener Stelle werden wir auf Alternativen hinweisen, erheben dabei jedoch keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

2 Syntax der Prädikatenlogik

In diesem Abschnitt definieren wir die formale Syntax der „Sprache“ der Prädikatenlogik, d.h., wir legen fest, wie die Sätze der Prädikatenlogik, *Formeln* genannt, gebildet werden. Außerdem geben wir formale Mechanismen an, mit denen sich Formeln modifizieren und andere Formeln erschließen lassen.

2.1 Zeichen

Zunächst legen wir die Zeichen (Symbole) fest, mit denen wir die Formeln der Prädikatenlogik schreiben. Einen Teil dieser Zeichen fassen wir in einer *Signatur* zusammen.

Definition 1 (Signatur)
Eine *Signatur* Σ ist ein Tripel $\Sigma = (\Theta, \Delta, \Pi)$ bestehend aus drei disjunkten Symbolmengen

$\Theta = \{A, B, \ldots\}$	Menge der Sorten- bzw. Typsymbole
$\Delta = \{f : A_1 \times \ldots \times A_n \to A_0;$ $g : B_1 \times \ldots \times B_m \to B_0; \ldots\}$	Menge der Funktions- bzw. Operationssymbole mit $n, m, \ldots$ Argumentsorten und einer Wertsorte
$\Pi = \{P : A_1 \times \ldots \times A_n;$ $Q : B_1 \times \ldots \times B_m; \ldots\}$	Menge der Prädikatensymbole mit $n, m, \ldots$ Argumentsorten

Die Zahl n der Argumentsorten eines Funktions- bzw. Prädikatensymbols heißt auch seine *Stelligkeit*, die Folge seiner Argumentsorten auch seine *Sortigkeit*, beide zusammen kurz seine *Arität*. □

Im folgenden nehmen wir stets eine Signatur Σ und

$\Omega = \{x.A, y.B, \ldots\}$	Menge von Variablensymbolen mit Sorten

als gegeben an. Desweiteren benötigen wir folgende Sonderzeichen:

$\neg$	Negationszeichen	( )	Klammern
$\vee$	Disjunktionszeichen	. ,	Punkt und Komma
$\exists$	Existenzquantor		

Damit sind alle (Grund-)Symbole gegeben, aus denen wir die Formeln der Prädikatenlogik aufbauen. Wir werden aber im folgenden weitere Zeichen zur Abkürzung bestimmter Zeichenfolgen einführen, z.B. das Konjunktionszeichen $\wedge$ und den Allquantor $\forall$. In anderen Darstellungen der Prädikatenlogik werden diese Abkürzungen mitunter als Grundzeichen definiert. Es entsteht dadurch kein wesentlicher Unterschied. Der Vorteil einer kleinen Menge von Sonderzeichen besteht allerdings darin, daß sich die folgenden Definitionen einfacher gestalten lassen.

Oft wird die Sorte einer Variable nicht explizit zusammen mit dieser angegeben, oder es wird nur eine Sorte verwendet (sortenlose Prädikatenlogik). Wird nur eine Sorte verwendet, werden oft „Sortenprädikate“ eingeführt, um die „Anwendbarkeit“ einer Funktion oder eines Prädikates zu prüfen. Dies führt gewöhnlich zu komplexeren Formeln für die gleichen Aussagen und einer etwas anderen Semantik.[1]

[1]Beispiel: In einer Prädikatenlogik mit Sorten wäre eine Formel, die den Satz „Der Mond ist eine gerade Zahl“ darstellt, sinnlos, da diese Formel nicht wohlgeformt ist („Mond“ hat nicht die richtige Sorte, um als Argument von „ist eine gerade Zahl“ auftreten zu können). In einer sortenlosen Prädikatenlogik dagegen ist eine entsprechende Formel sinnvoll (wohlgeformt), aber falsch.

2.2 Terme

Terme dienen, wie schon in der Einleitung bemerkt, zur Darstellung von Namen und Kennzeichnungen. Sie sind die Argumente der Prädikate.

Definition 2 (Terme)
Die Menge $\mathcal{T}_\Sigma(\Omega)$ der Σ-*Terme* mit Variablen aus Ω ist induktiv definiert durch:

(1) Jede Variable $x.A$ ist ein Term der Sorte A.

(2) Sind $t_1.A_1, \ldots, t_n.A_n$ Terme und ist $f : A_1 \times \ldots \times A_n \to A_0$ ein Funktionssymbol, so ist $f(t_1.A_1, \ldots, t_n.A_n).A_0$ ein Term der Sorte A_0.

(3) Keine anderen Zeichenreihen sind Terme.

Ist $\Omega = \emptyset$, so schreiben wir auch einfach $\mathcal{T}_\Sigma$. □

2.3 Formeln

Formeln sind die „Sätze" der Prädikatenlogik. Sie bilden die Sätze natürlicher Sprachen nach (allerdings nur Aussagen, keine Fragen, Aufforderungen o.ä.).

Definition 3 (Formeln)
Die Menge $\mathcal{F}_\Sigma(\Omega)$ der Σ-*Formeln* mit Variablen aus Ω ist induktiv definiert durch:

(1) Sind $t_1.A_1, \ldots, t_n.A_n$ Terme und ist $P : A_1 \times \ldots \times A_n$ ein Prädikatensymbol, so ist $P(t_1.A_1, \ldots, t_n.A_n)$ eine Formel.

(2) Sind φ, φ_1, φ_2 Formeln und ist $x.A$ eine Variable, so sind auch
$$(\neg\varphi), \qquad (\varphi_1 \vee \varphi_2) \qquad \text{und} \qquad (\exists x.A : \varphi)$$
Formeln.

(3) Keine anderen Zeichenreihen sind Formeln.

Ist $\Omega = \emptyset$, so schreiben wir auch einfach $\mathcal{F}_\Sigma$. □

Bemerkungen:

- Manchmal verwendet man ein spezielles sortenunabhängiges Prädikat „=" zur Darstellung der Gleichheit. Ein solches Prädikat erleichtert die Formalisierung natürlichsprachlicher Aussagen erheblich. Da es jedoch stets durch sortenspezifische Gleichheitsprädikate in Π ersetzt werden kann, verzichten wir hier auf die Einführung eines solchen Prädikates.
- Formeln gemäß (1) heißen auch *atomare Formeln* oder *Atome*.
- Ist φ eine atomare Formel, so heißen φ und $(\neg\varphi)$ auch *Literale*; und zwar φ *positives* und $(\neg\varphi)$ *negatives Literal*.
- Manchmal bezeichnet man auch *alle* Zeichenketten, die sich aus den oben angegebenen Zeichen bilden lassen, als Formeln und die hier definierten als *wohlgeformte Formeln* (WFF, well-formed formula). Dies erlaubt u.U. bessere Sprechweisen.

2.4 Konventionen

Zur Vereinfachung der Sprechweise und der Schreibweise prädikatenlogischer Formeln führen wir einige Konventionen ein.

- Nullstellige Funktionssymbole heißen auch *Konstantensymbole* oder kurz *Konstante* und werden mit $a.A, b.B, \ldots$ bezeichnet (statt $a :\to A, b :\to B, \ldots$).
- Konstantensymbole bilden auch Terme. Sie werden ebenfalls mit $a.A, b.B, \ldots$ bezeichnet (statt $a().A, b().B, \ldots$).
- Nullstellige Prädikatensymbole heißen auch *Aussagensymbole* oder kurz *Aussagen* und werden mit $R, S, \ldots$ bezeichnet (statt $R :, S :, \ldots$).
- Aussagensymbole bilden auch Formeln. Sie werden ebenfalls mit $R, S, \ldots$ bezeichnet (statt $R(), S(), \ldots$).
- Die Wahrheitswerte W (wahr) und F (falsch) sind ebenfalls (atomare) Formeln. Sie können als spezielle nullstellige Prädikate aufgefaßt, als elementare Formeln in der Definition 3 hinzugefügt, oder als Abkürzungen eingeführt werden, und zwar durch

  $$W \mathrel{\widehat{=}} (X \vee (\neg X)) \qquad \text{und} \qquad F \mathrel{\widehat{=}} (X \wedge (\neg X)),$$

  wobei X eine beliebige Aussage ist.
- Weitere Formeln werden durch folgende Abkürzungen eingeführt:

$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	$\widehat{=}$	$(\neg((\neg\varphi_1) \vee (\neg\varphi_2)))$	Konjunktionszeichen
$(\varphi_1 \to \varphi_2)$	$\widehat{=}$	$((\neg\varphi_1) \vee \varphi_2)$	Implikationszeichen
$(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$	$\widehat{=}$	$((\varphi_1 \to \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \to \varphi_1))$	Biimplikationszeichen
$(\forall x.A : \varphi)$	$\widehat{=}$	$(\neg(\exists x.A : (\neg\varphi)))$	Allquantor

  usw.

  Die Zeichen $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$, etc. heißen *Konnektive* oder *Junktoren*, die Zeichen $\exists$ und $\forall$ heißen *Quantoren.*
- Enthält eine Formel φ keine Quantoren, so heißt sie *quantorenfrei.*
- Zur Vereinfachung der Formeln gelten die üblichen „Klammereinsparungsregeln," die folgende Rangfolge (Bindungspriorität) der Konnektive und Quantoren ausnutzen:

  $$\neg \quad \succ \quad \wedge \quad \succ \quad \vee \quad \succ \quad \to \quad \succ \quad \leftrightarrow \quad \succ \quad \exists, \forall$$

  $\succ$ ist als „bindet stärker als" zu lesen.
- Wenn keine Verwechslungen zu erwarten sind oder die Sorte keine Rolle spielt, werden die Sortenangaben $.A$ weggelassen.

2.5 Freie und gebundene Variablen

Variablen dienen als Platzhalter. Sie können durch Terme ersetzt werden. Doch i.a. sind nicht alle Variablen einer Formel beliebig ersetzbar. In der Formel $(\forall x : P(x))$ kann beispielsweise die Variable x nicht durch einen beliebigen Term ersetzt werden, da z.B. $(\forall f(x, y) : P(f(x, y)))$ nach unserer Definition keine Formel ist. Wir müssen daher die Variablen einer Formel, die beliebig ersetzt werden können (freie Variablen), und die Variablen, die nur umbenannt werden dürfen (gebundene Variablen) unterscheiden.

Definition 4 (freie und gebundene Variablen)
Freie und gebundene Variablen werden wieder induktiv definiert.

(1) Jede in einer atomaren Formel auftretende Variable ist dort frei.

(2) Ist φ eine Formel und ist die Variable x in φ frei, so ist x auch in $(\neg\varphi)$ frei.

(3) Sind φ_1 und φ_2 Formeln und ist x in mindestens einer dieser Formeln frei, so ist x auch in $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ frei.

(4) Ist φ eine Formel und ist x in dieser Formel frei, so ist x in $(\exists x : \varphi)$ nicht frei, sondern (durch $\exists$) gebunden. $\square$

Bemerkungen:

- $(\exists x : \varphi)$ heißt der *Existenzabschluß*, $(\forall x : \varphi)$ der *Allabschluß* von φ *bezüglich* x. Der Abschluß einer Formel φ nur mit Existenz- bzw. nur mit Allquantoren heißt *Existenz-* bzw. *Allabschluß* von φ.
- Eine Formel ohne freie Variable heißt *geschlossen.*
- Eine geschlossene atomare Formel heißt *Grundformel.*
- Ein Term ohne Variable heißt *Grundterm.*
- Mit $\mathrm{var}(t)$ bezeichnen wir die Menge der Variablen des Terms t, mit $\mathrm{var}(\varphi)$ die Menge der Variablen der Formel φ. Ist $\mathrm{var}(t) = \emptyset$ bzw. $\mathrm{var}(\varphi) = \emptyset$, so heißt t bzw. φ *variablenfrei.*

2.6 Substitutionen

Variablen dienen, wie erwähnt, als Platzhalter. Ggf. sollen sie durch Terme ersetzt werden. Dazu brauchen wir einen formalen Mechanismus, die *Substitution.*

Definition 5 (Substitution)
Eine Abbildung $\sigma : \Omega \to T_\Sigma(\Omega)$ heißt *Substitution*, falls die Variable x und ihr Bild $\sigma(x)$ für alle $x \in \Omega$ die gleiche Sorte haben und ihr Wertebereich $\mathrm{dom}(\sigma) = \{x \in \Omega \mid \sigma(x) \neq x\}$ endlich ist. Für eine Substitution σ mit $\mathrm{dom}(\sigma) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\sigma(x_i) = t_i, 1 \leq i \leq n$, schreiben wir

$$\sigma = [x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n] \qquad \text{oder} \qquad \sigma = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ t_1 & & t_n \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Bemerkungen und Konventionen:

- Für $\sigma(x)$ verwenden wir oft die Postfix-Notation $x\sigma$.
- Mit $[]$ bezeichnen wir die Identität auf Ω.
- Mit $\mathrm{var}(\sigma) = \bigcup_{x\in\Omega} \mathrm{var}(\sigma(x))$ bezeichnen wir die Menge der Variablen im Bildbereich einer Substitution σ. Ist $\mathrm{var}(\sigma) = \emptyset$, so heißt σ *Grundsubstitution.*
- Falls σ eine Permutation ist (d.h. injektiv und surjektiv), so heißt σ *Umbenennung.*

Definition 6 (Fortsetzung einer Substitution)
Eine Substitution σ wird nach dem folgenden Schema auf Terme, quantorenfreie Formeln und Mengen quantorenfreier Formeln fortgesetzt:

$$\begin{array}{rcl}
\sigma^*(f(t_1,\dots,t_n)) & = & f(\sigma^*(t_1),\dots,\sigma^*(t_n)) \\
\sigma^*(P(t_1,\dots,t_n)) & = & P(\sigma^*(t_1),\dots,\sigma^*(t_n)) \\
\sigma^*(\neg\varphi) & = & \neg(\sigma^*(\varphi)) \\
\sigma^*(\varphi_1 \vee \varphi_2) & = & \sigma^*(\varphi_1) \vee \sigma^*(\varphi_2) \\
\sigma^*(\Phi) & = & \{\sigma^*(\varphi) \mid \varphi \in \Phi\}
\end{array}$$

wobei $f : A_1 \times \ldots \times A_n \to A_0$ ein Funktionssymbol, $P : A_1 \times \ldots \times A_n$ ein Prädikatensymbol, $t_1, \ldots, t_n$ Terme, $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ quantorenfreie Formeln und Φ eine Menge quantorenfreier Formeln.
$\square$

Bemerkungen:

- Für die Fortsetzung einer Substitution schreiben wir im folgenden ebenfalls einfach σ (statt σ^*).
- Die *Komposition* $\sigma\tau$ zweier Substitutionen (oder ihrer Fortsetzungen) σ und τ ist definiert durch $t(\sigma\tau) = (\sigma \circ \tau)(t) = \tau(\sigma(t))$ („erst σ, dann τ“).
- Wir haben die Fortsetzung einer Substitution nur für quantorenfreie Formeln definiert. Diese Einschränkung ist jedoch nicht von Belang, da wir später nur mit bestimmten Normalformen arbeiten werden, die quantorenfrei sind.

Definition 7 ((Grund-)Instanz)
Für jede Substitution σ heißt $\sigma(t)$ *Instanz* des Terms t, $\sigma(\varphi)$ *Instanz* der quantorenfreien Formel φ. Ist $\sigma(t)$ bzw. $\sigma(\varphi)$ variablenfrei, so nennen wir $\sigma(t)$ bzw. $\sigma(\varphi)$ *Grundinstanz* des Terms t bzw. der quantorenfreien Formel φ. Die Menge *aller* Grundinstanzen eines Terms t bzw. einer quantorenfreien Formel φ bezeichnen wir mit $\mathrm{grnd}(t)$ bzw. $\mathrm{grnd}(\varphi)$. Grundinstanzen eines Terms t bzw. der Formel φ.

Lemma 1 (Eigenschaften von Substitutionen)
Für alle Substitutionen σ, τ, σ_1, σ_2 und σ_3 sowie Terme t gilt:

(1) $\sigma[] = []\sigma = \sigma$

(2) $(t\sigma)\tau = t(\sigma\tau)$ (das rechtfertigt die Schreibweise „$t\sigma\tau$“)

(3) $(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$ (Assoziativität)

(4) Ist $t\sigma = t\tau$ für alle $t \in T_\Sigma(\Omega)$, dann gilt $\tau = \sigma$.

(5) Ist $\sigma\tau = \sigma$, so gilt[2] $\tau|_{\mathrm{var}\,\sigma} = []|_{\mathrm{var}(\sigma)}$. $\square$

[2] $f|_A$ bezeichnet die Einschränkung der Abbildung $f : B \to C$ auf die Teilmenge $A \subseteq B$ des Definitionsbereichs, wobei $f|_A(a) = f(a)$ für alle $a \in A$ gilt.

2.7 Ableitungen

Die Logik soll uns helfen, Schlußfolgerungen zu ziehen und Argumente zu analysieren. Wir benötigen daher Mechanismen, die es uns erlauben, aus gegebenen Formeln andere Formeln abzuleiten (zu erschließen): *Ableitungsregeln*.

Definition 8 (Ableitungsregel, Anwendung von Regeln)
Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sowie φ prädikatenlogische Formeln. Eine *n-stellige Ableitungsregel* mit den *Prämissen* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ und der *Konklusion* φ ist ein Schema (*Regelschema, Argumentschema*) folgender Gestalt:

$$\frac{\varphi_1 \quad \cdots \quad \varphi_n}{\varphi}$$

Ein *Regelsystem* $\mathcal{R}$ ist eine Menge von Ableitungsregeln.

Eine Ableitungsregel auf gegebene Formeln *anwenden* heißt, die Prämissen einer *Instanz* des Regelschemas mit diesen Formeln zur Deckung zu bringen und daraus die Konklusion (als entsprechende Instanz) zu erhalten. (Eine Instanz des Regelschemas erhält man durch Anwendung einer Substitution auf alle Formeln des Schemas.) Eine solche Regelanwendung nennen wir einen *Ableitungsschritt*. □

Definition 9 (Ableitung, ableitbar)
Sei $\mathcal{R}$ ein Regelsystem, Φ eine Formelmenge und φ eine Formel. Die *Ableitung* von φ mit $\mathcal{R}$ aus Φ ist induktiv definiert als eine Folge von Formeln:

(1) Für jedes $\varphi \in \Phi$ ist (φ) eine Ableitung von φ mit $\mathcal{R}$ aus Φ.

(2) Ist $(\psi_1, \ldots, \psi_k)$ eine Ableitung von ψ_k mit $\mathcal{R}$ aus Φ und $R \in \mathcal{R}$ eine n-stellige Ableitungsregel, so daß durch Anwendung von $\mathcal{R}$ auf die Formeln $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Phi \cup \{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$ die Konklusion φ entsteht. Dann ist $(\psi_1, \ldots, \psi_k, \varphi)$ eine Ableitung von φ mit $\mathcal{R}$ aus Φ.

(3) Keine anderen Formelfolgen sind Ableitungen.

Gibt es eine Ableitung von φ mit $\mathcal{R}$ aus Φ, so heißt φ mit $\mathcal{R}$ aus Φ *ableitbar*. Wir schreiben in diesem Fall $\Phi \vdash_{\mathcal{R}} \varphi$. □

Nach dieser Definition sind alle Ableitungen endlich. Daher kann man sich bei Ableitbarkeitsaussagen auf endliche Formelmengen beschränken und Ableitbarkeitsbeweise durch Induktion über den Aufbau der Ableitung führen.

3 Semantik der Prädikatenlogik

Mit dem vorhergehenden Abschnitt haben wir die *Syntax* der Prädikatenlogik hinreichend genau erklärt; wir müssen nun noch festlegen, wie wir Terme und Formeln deuten wollen, d.h. welche *Semantik* wir verwenden. Dazu interpretieren wir die syntaktischen Objekte aus dem vorigen Abschnitt durch geeignete mathematische Begriffe, wie etwa Mengen und ihre Elemente, Relationen oder Abbildungen.

3.1 Interpretation einer Signatur und Variablenbelegung

Zuerst müssen wir den Zeichen einer Signatur eine Bedeutung zuordnen.

Definition 10 (Interpretation)
Eine *Interpretation* einer Signatur $\Sigma = (\Theta, \Delta, \Pi)$ ist eine Σ-Struktur $I(\Sigma) = (I(\Theta), I(\Delta), I(\Pi))$, wobei I mit

$I(\Theta)$ jeder Sorte A eine Trägermenge $I(A)$ (*Individuen*),

$I(\Delta)$ jedem Funktionssymbol $f : A_1 \times \ldots \times A_n \to A_0$ eine Funktion $I(f) : I(A_1) \times \ldots \times I(A_n) \to I(A_0)$ und

$I(\Pi)$ jedem Prädikatensymbol $P : A_1 \times \ldots \times A_n$ ein Prädikat (oder: eine Relation) $I(P) : I(A_1) \times \ldots \times I(A_n)$ zuordnet. □

Variablen sind, wie bereits mehrfach erwähnt, Platzhalter und stehen daher für keinen bestimmten Wert. Zur Auswertung von Termen und zur Bestimmung der Gültigkeit von Formeln muß ihnen aber ein bestimmter Wert zugewiesen werden.

Definition 11 (Variablenbelegung)
Eine *Belegung* β ordnet jeder Variablen $x.A \in \Omega$ einen Wert $\beta(x.A) \in I(A)$ zu. □

3.2 Auswertung von Termen

Nachdem allen Symbolen eine Bedeutung zugeordnet ist, können wir die Auswertung von Termen unter einer Interpretation I bezüglich einer Variablenbelegung β betrachten.

Definition 12 (Termauswertung)
Für den Wert des Terms $t \in \mathcal{T}_\Sigma(\Omega)$ unter I bezüglich β schreiben wir $[\![t]\!]_{(I,\beta)}$. Terme werden nach dem folgenden induktiven Schema ausgewertet:

$$\begin{aligned} [\![x]\!]_{(I,\beta)} &= \beta(x) \\ [\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]_{(I,\beta)} &= I(f)(\,[\![t_1]\!]_{(I,\beta)}, \ldots, [\![t_n]\!]_{(I,\beta)}) \end{aligned} \quad \square$$

3.3 Gültigkeit von Formeln

Schließlich betrachten wir die Gültigkeit von Formeln $\varphi \in \mathcal{P}_\Sigma(\Omega)$ unter einer Interpretation I bezüglich einer Variablenbelegung β.

Definition 13 (Gültigkeit von Formeln)
Wir schreiben $(I, \beta) \models \varphi$, falls die Formel φ in der Σ-Struktur I bezüglich der Variablenbelegung β gilt, d.h. wahr ist. Die Gültigkeit von Formeln wird nach dem folgenden induktiven Schema bestimmt:

$$\begin{array}{lll} (I,\beta) \models P(t_1, \ldots, t_n) & \text{gdw.} & \left(\,[\![t_1]\!]_{(I,\beta)}, \ldots, [\![t_n]\!]_{(I,\beta)}\right) \in I(P) \\ (I,\beta) \models (\neg\varphi) & \text{gdw.} & \text{nicht } (I,\beta) \models \varphi \\ (I,\beta) \models (\varphi_1 \vee \varphi_2) & \text{gdw.} & (I,\beta) \models \varphi_1 \text{ oder } (I,\beta) \models \varphi_2 \\ (I,\beta) \models (\exists x : \varphi) & \text{gdw.} & \text{es eine Belegung } \beta' \text{ gibt, die sich von } \beta \text{ nur im Wert} \\ & & \text{für } x \text{ unterscheidet, so daß } (I,\beta') \models \varphi \text{ gilt.} \end{array} \quad \square$$

3.4 Modelle und Theorien

Wir definieren nun einige allgemeinere Begriffe im Zusammenhang mit der Gültigkeit von Formeln, speziell den wichtigen Begriff des *Modells*.

Definition 14 (Gültigkeit, Modell)

- Eine Formel φ (über einer Signatur Σ) *gilt* in einer Σ-Struktur I genau dann, wenn der Allabschluß von φ in I gilt (oder äquivalent: wenn $(I, \beta) \models \varphi$ für alle Belegungen β). Wir schreiben in diesem Fall $I \models \varphi$ und nennen I ein *Modell* von φ.
- Die Σ-Struktur I heißt Modell einer Formel*menge* $\Phi \subseteq \mathcal{F}_\Sigma(\Omega)$, wenn I Modell aller Formeln $\varphi \in \Phi$ ist. Wir schreiben in diesem Fall $I \models \Phi$. □

Definition 15 (Modellklasse, Theorie)

- Sei $\Phi \subseteq \mathcal{F}_\Sigma(\Omega)$ eine Formelmenge. Die *Klasse der Modelle* von Φ ist
$$\mathrm{Mod}(\Phi) = \{I \mid I \models \varphi \text{ für alle } \varphi \in \Phi\}.$$
- Sei $\mathcal{I}$ eine Klasse von Σ-Strukturen. Die *Theorie* von $\mathcal{I}$ ist die Menge
$$\mathrm{Th}(\mathcal{I}) = \{\varphi \mid I \models \varphi \text{ für alle } I \in \mathcal{I}\}.$$
- Abschlußoperatoren:
$$\begin{aligned} \Phi^* &= \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\Phi)) && \text{von } \Phi \text{ erzeugte Theorie} \\ \mathcal{I}^* &= \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{I})) && \text{von } \mathcal{I} \text{ erzeugte Modellklasse} \end{aligned}$$
□

Definition 16 (Erfüllbarkeit)

- Eine Formel(menge) (zur Signatur Σ) heißt *erfüllbar*, wenn sie ein Modell besitzt, anderenfalls *unerfüllbar* oder *widersprüchlich*.
- Zwei Formel(menge)n heißen *erfüllbarkeitsgleich*, wenn entweder beide erfüllbar oder beide unerfüllbar sind.
- Eine Formel φ heißt *allgemeingültig* oder eine *Tautologie*, wenn jede Σ-Struktur I ein Modell von φ ist. Wir schreiben in diesem Fall $\models \varphi$. □

3.5 Logisches Folgen

Auf den Definitionen des vorhergehenden Abschnitts baut der zentrale Begriff der Logik auf, das *logische Folgen*.

Definition 17 (logisches Folgen, Äquivalenz)

- Eine Formel φ *folgt* (logisch) aus einer Formelmenge Φ (geschrieben: $\Phi \models \varphi$) genau dann, wenn jedes Modell von Φ auch Modell von φ ist.
- Eine Formel*menge* Ψ folgt aus Φ, wenn alle Formeln $\psi \in \Psi$ aus Φ folgen.
- Folgen zwei Formel(menge)n wechselseitig auseinander, so heißen sie *äquivalent*. □

Bemerkung: Manchmal definiert man auch: $\Phi \models \varphi$ gdw. für alle I und alle β gilt: wenn für alle $\psi \in \Phi \subseteq \mathcal{P}_\Sigma(\Omega)$ gilt, daß $(I, \beta) \models \psi$, so folgt $(I, \beta) \models \varphi$, d.h. alle Interpretationen I und Belegungen β, die alle Formeln in Φ wahr machen, machen auch φ wahr.

Lemma 2 (Logisches Folgern durch Widerlegen)
Für eine Formelmenge Φ und eine geschlossene Formel φ gilt:
$\Phi \models \varphi$ gdw. $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widersprüchlich. □

4 Normierung der Syntax: Gentzenformeln und die Schnittregel

Um eine unüberschaubare Vielfalt von inhaltlich gleichwertigen, aber syntaktisch verschiedenen Formeln zu vermeiden, beschränkt man sich gerne auf gewisse Normalformen. Die bekanntesten Vertreter sind die *disjunktive* und die *konjunktive* Normalform.

Definition 18 (disjunktive und konjunktive Normalform)

- Eine Formel ist in *disjunktiver Normalform* (DNF), wenn sie die Gestalt $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$ hat, wobei alle φ_i, $1 \leq i \leq n$, Konjunktionen von Literalen sind.
- Eine Formel ist in *konjunktiver Normalform* (KNF), wenn sie die Gestalt $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ hat, wobei alle φ_i, $1 \leq i \leq n$, Disjunktionen von Literalen sind. □

Im folgenden schränken wir uns noch weiter ein, und zwar auf sogenannte Gentzenformeln. Dies ist insofern gerechtfertigt, als erstens jede quantorenfreie Formel in eine äquivalente Menge von Gentzenformeln überführt werden kann, und zweitens bei der Formalisierung in vielen Anwendungsgebieten oft nur Gentzenformeln entstehen.

4.1 Normalformen

Die im folgenden betrachteten Normalformen stellen gleichzeitig einen Mechanismus bereit, um beliebige Formeln in eine Menge von Gentzenformeln zu überführen.

Definition 19 (Pränexe Normalform)
Eine Formel ist in *pränexer Normalform*, wenn sie folgende Gestalt hat:

$$\underbrace{Q_1 \ldots Q_n}_{\text{Quantoren}} \quad \underbrace{M}_{\text{quantorenfreie Formel}}$$

M nennt man auch die *Matrix* der Formel. □

Lemma 3 Jede prädikatenlogische Formel läßt sich in eine *äquivalente* Formel in pränexer Normalform überführen. □

Definition 20 (Skolem-Normalform)
Eine Formel in pränexer Normalform wird in *Skolem-Normalform* überführt, indem man von außen nach innen (!) alle Quantoren eliminiert, wobei

(1) Allquantoren einfach wegfallen,

(2) für die durch einen Existenzquantor gebundene Variable ein neuer Term eingesetzt wird, bestehend aus einem Funktionssymbol, das in der Signatur noch nicht vorkommt, parametrisiert mit allen bereits freien Variablen der Formel. (Achtung: Hier findet ein Signaturwechsel statt!) □

Lemma 4 Jede Formel in pränexer Normalform läßt sich in eine *erfüllbarkeitsgleiche* Formel in Skolem-Normalform überführen. □

Bemerkung: Die Skolem-Normalform ist i.a. nicht äquivalent, da z.B. $P(a) \vee P(b) \models \exists x P(x)$, aber i.a. nicht $P(a) \vee P(b) \models P(s)$ mit einer (nullstelligen) Skolem-Funktion s.

Definition 21 (Gentzenformeln, Hornformeln)
Sind φ_i, $1 \leq i \leq n$, ψ_j, $1 \leq j \leq m$, φ und ψ atomare Formeln, so nennen wir

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m \qquad \textit{Gentzenformel},$$

wobei wir folgende Spezialfälle auszeichnen:

n $n = 0$	$W \rightarrow \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m$	*positive Gentzenformel,*
$m = 0$	$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \rightarrow F$	*negative Gentzenformel,*
$n = 0, m = 0$	$W \rightarrow F$ oder kurz $\Box$	*Widerspruch*

sowie als besonders wichtige Unterklasse die *Hornformeln* ($m \leq 1$), darunter:

$m = 1$	$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$	*(nichtnegative) Hornformel,*
$m = 0$	$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \rightarrow F$	*negative Hornformel.*

$\Box$

Schreibt man Gentzenformeln bzw. Hornformeln in der Form

$$\{\neg\varphi_1, \ldots, \neg\varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m\} \qquad \text{bzw.} \qquad \{\neg\varphi_1, \ldots, \neg\varphi_n, \psi\},$$

d.h. als Menge von Literalen, die man sich disjunktiv verknüpft denkt, so heißen sie auch *Gentzenklauseln* bzw. *Hornklauseln.*

Lemma 5 Jede quantorenfreie Formel läßt sich in eine dazu *äquivalente Menge* von Gentzenformeln überführen. $\Box$

Dazu wird die quantorenfreie Formel in konjunktive Normalform überführt und jede Disjunktion dieser Normalform eine eigene Regel umgewandelt. Die erhaltene Formelmenge wird, wie bei Formelmengen üblich, als konjunktiv verknüpft angesehen.

4.2 Ableitungsregeln

Nach den Formeln normieren wir die Ableitungen; und zwar lassen wir für Gentzenformeln nur zwei Ableitungsregeln zu: die *Schnittregel* bzw. Substitutionsregel, die für die aussagenlogische Struktur der Formeln zuständig ist, und die *Substitutionsregel*, mit der Instanzen von Formeln gebildet werden können.

Definition 22 (Schnittregel, Resolutionsregel)
Die zweistellige Ableitungsregel

$$\frac{\varphi_1 \rightarrow \psi_1 \vee \alpha \qquad \alpha \wedge \varphi_2 \rightarrow \psi_2}{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \rightarrow \psi_1 \vee \psi_2}$$

wobei α ein Atom, φ_1 und φ_2 Konjunktionen und ψ_1 und ψ_2 Disjunktionen von Atomen sind, heißt *Schnittregel* oder *Resolutionsregel für Gentzenformeln.* $\Box$

Oft verwendet man die vereinfachte Form

$$\frac{\varphi \vee \alpha \qquad \neg\alpha \vee \psi}{\varphi \vee \psi}$$

dieser Regel für reine Disjunktionen (bzw. Klauseln), da sich Gentzenformeln ja stets durch Elimination der Implikation und Umwandlung der Konjunktionen in Disjunktionen (über die deMorganschen Gesetze) in reine Disjunktionen umwandeln lassen, die sich i.a. einfacher handhaben lassen.

Definition 23 (Substitutionsregel)
Die einstellige Ableitungsregel

$$\frac{\varphi}{\sigma(\varphi)}$$

wobei φ eine quantorenfreie Gentzenformel und σ eine Substitution ist, heißt *Substitutionsregel*. □

Mit diesen beiden Regeln haben wir ein geeignetes Regelsystem für die offene Prädikatenlogik, d.h. die Prädikatenlogik mit ausschließlich quantorenfreien Formeln, wenn wir uns auf Gentzenformeln beschränken.

5 Normierung der Semantik: Herbrand-Strukturen

Nach der Syntax normieren wir die Semantik der Prädikatenlogik mit Hilfe sogenannter *Herbrand-Strukturen*. In einer solchen Struktur sind die Grundterme die Individuen und die termaufbauenden Operationen die Funktionen. Deshalb werden Herbrand-Strukturen auch *Term-Strukturen* genannt.

Definition 24 (Herbrand-Struktur, Herbrand-Universum)
Eine *Herbrand-Struktur* $H(\Sigma) = (H(\Theta), H(\Delta), H(\Pi))$ zu einer Signatur Σ ist eine Σ-Struktur, wobei H mit

$H(\Theta)$ jeder Sorte A die Menge $H(A)$ der Grundterme über Σ zur Sorte A und mit

$H(\Delta)$ jedem Funktionssymbol $f : A_1 \times \ldots \times A_n \rightarrow A_0$ die entsprechende termaufbauende Operationen $H(f)$ zuordnet, d.h. $H(f)(t_1, \ldots, t_n) \,\widehat{=}\, f(t_1, \ldots, t_n)$.

Der Prädikatenbereich $H(\Pi)$ ist nicht festgelegt. Die Vereinigung der sortenspezifischen Individuenmengen (Grundterme) $\mathcal{U} = \cup_{A \in \Theta} H(A)$ heißt *Herbrand-Universum*. □

Definition 25 (Herbrand-Basis)
Die *Herbrand-Basis* zur Signatur Σ ist die Menge aller Grundformeln über Σ:

$$\mathcal{B}_\Sigma = \{P(t_1, \ldots, t_n) \mid P : A_1 \times \ldots \times A_n \text{ Prädikatensymbol in } \Sigma, t_i \in H(A_i)\} \qquad \square.$$

Lemma 6 Jede Festlegung der Prädikate in der Herbrand-Struktur H läßt sich eindeutig beschreiben durch eine entsprechende Teilmenge $\mathcal{A}$ der Herbrand-Basis:

$$P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_\Sigma \quad \text{gdw.} \quad (t_1, \ldots, t_m) \in H(P),$$

d.h. in $\mathcal{A}$ sind genau die Grundatome, deren Interpretation in H wahr ergibt. □

Definition 26 (Herbrand-Modell)
Ein *Herbrand-Modell* einer Formelmenge Φ ist eine Herbrand-Struktur, die Modell von Φ ist (d.h. in der alle Formeln $\varphi \in \Phi$ gelten). □

Satz 1 Eine Menge Φ von quantorenfreien Formeln ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrand-Modell besitzt. □

Beweis: siehe [3]

Wegen dieses Satzes braucht man nicht erst umständlich nach einem Modell einer Formelmenge Φ zu suchen, sondern kann stets mit einer Herbrand-Struktur arbeiten.

6 Korrektheit und Vollständigkeit

Die Brücke zwischen (semantischem) *Folgern* und (syntaktischem) *Ableiten* wird geschlagen durch die Begriffe *Korrektheit* und *Vollständigkeit*. Ein korrektes und vollständiges Regelsystem garantiert erstens, daß nur logische Folgerungen abgeleitet werden, und zweitens, daß alle möglichen Folgerungen auch erfaßt werden.

Definition 27 (korrekt, vollständig, widerlegungsvollständig)
Ein Regelsystem $\mathcal{R}$ heißt

- *korrekt* für logisches Folgern, wenn gilt: wenn $\Phi \vdash_{\mathcal{R}} \varphi$, dann $\Phi \models \varphi$
- *vollständig* für logisches Folgern, wenn gilt: wenn $\Phi \models \varphi$, dann $\Phi \vdash_{\mathcal{R}} \varphi$
- *widerlegungsvollständig*, wenn gilt: wenn Φ widersprüchlich, dann $\Phi \vdash_{\mathcal{R}} \Box$,

für alle Formelmengen Φ und alle Formeln φ.

Satz 2 Das aus der Schnittregel und der Substitutionsregel bestehende Regelsystem $\mathcal{R}$ ist widerlegungsvollständig für Gentzenformeln.

Beweis: siehe [3]

Bemerkung: Das aus der Schnittregel und der Substitutionsregel bestehende Regelsystem $\mathcal{R}$ ist *nicht* vollständig für Gentzenformeln, da z.B. $P(x) \wedge Q(x) \models P(x) \vee Q(x)$, aber nicht $P(x) \wedge Q(x) \vdash_{\mathcal{R}} P(x) \vee Q(x)$.

Literatur

[1] H.-D. Ebbinghaus, J. Flum und W. Thomas. *Einführung in die mathematische Logik.* BI Wissenschaftsverlag, Mannheim 1992

[2] H. Hermes. *Einführung in die mathematische Logik.* Teubner Verlag, Stuttgart 1976

[3] D. Hofbauer und R.-D. Kutsche. *Grundlagen des maschinellen Beweises.* Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden 1989

[4] J.M. Keynes. A Treatise on Probability. In: *The Collected Writings of J.M. Keynes.* Vol. VIII, Basingstoke, London 1973

[5] P.S. Novikov. *Grundzüge der mathematischen Logik.* Vieweg Verlag, Braunschweig 1973

[6] E. von Savigny. *Grundkurs im wissenschaftlichen Definieren.* Deutscher Taschenbuch Verlag, München 1970

[7] U. Schöning. *Logik für Informatiker.* BI Wissenschaftsverlag, Mannheim 1989