Chi-Quadrat-Test

Mit dem **χ^2-Test** (*Chi-Quadrat-Test*) untersucht man Verteilungseigenschaften einer statistischen Grundgesamtheit.

Man unterscheidet vor allem die beiden Tests:

- Verteilungstest oder Anpassungstest: Hier wird geprüft, ob vorliegende Daten einer bestimmten Verteilung entstammen.
- Unabhängigkeitstest: Hier wird geprüft, ob zwei Merkmale stochastisch unabhängig sind.

Verteilungstest

Man betrachtet ein statistisches Merkmal x, dessen Wahrscheinlichkeiten in der Grundgesamtheit unbekannt sind. Es wird bezüglich der Wahrscheinlichkeiten von x eine vorläufig allgemein formulierte Nullhypothese

> H_o: Das Merkmal x hat die Wahrscheinlichkeitsverteilung $F_o(x)$

aufgestellt.

Vorgehensweise

Die n Beobachtungen von x liegen in m verschiedenen Kategorien j (j = 1,... m) vor. Treten bei einem Merkmal sehr viele Ausprägungen auf, fasst man sie zweckmäßigerweise in m Klassen zusammen und fasst die Klassenzugehörigkeit als j-te Kategorie auf. Die Zahl der Beobachtungen in einer Kategorie ist die beobachtete Häufigkeit n_j.

Man überlegt sich nun, wie viele Beobachtungen im Mittel in einer Kategorie liegen müssten, wenn x tatsächlich die hypothetische Verteilung hat. Dazu berechnet man zunächst die Wahrscheinlichkeit $F_o(x)_j$, dass x in diese Kategorie fällt.

$$n_{jo} = F_o(x)_j \cdot n$$

ist die unter H_o zu erwartende Häufigkeit.

Die Prüfgröße für den Test ist

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{(n_j - n_{jo})^2}{n_{jo}}.$$

Die Prüfgröße χ^2 ist bei ausreichend großen n_j annähernd χ^2-verteilt mit m-1 Freiheitsgraden.

Wenn die Nullhypothese wahr ist, sollte der Unterschied zwischen der beobachteten und der theoretisch erwarteten Häufigkeit klein sein. Also wird H_o bei einem hohen Prüfgrößenwert abgelehnt, der Ablehnungsbereich für H_o liegt rechts.

Bei einem Signifikanzniveau α wird H_o abgelehnt, wenn $\chi^2 > \chi^2(1-\alpha; m-1)$, dem $(1-\alpha)$-Quantil der χ^2-Verteilung mit m-1 Freiheitsgraden ist.

Es existieren Tabellen für die χ^2-Schwellenwerte in Abhängigkeit von der Anzahl der Freiheitsgrade und vom gewünschten Signifikanzniveau, z. B. [1] oder (knapper) [2].

Soll die Sicherheitsschwelle (=Signifikanzniveau), die zu einem bestimmten χ^2 gehört, bestimmt werden, so muss in der Regel aus der Tabelle ein Zwischenwert berechnet werden. Dazu verwendet man logarithmische Interpolation.

Besonderheiten

Schätzung von Verteilungsparametern

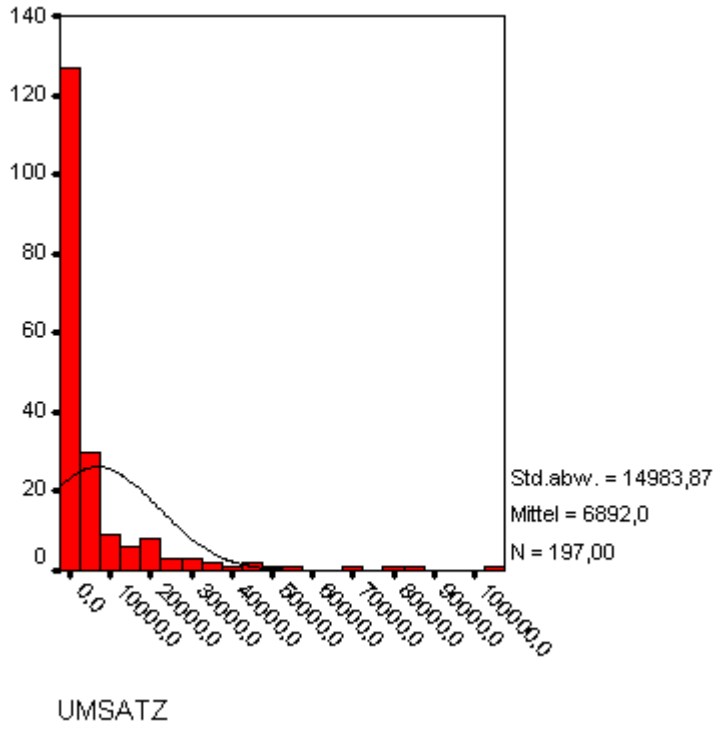
Im allgemeinen gibt man bei der Verteilungshypothese die Parameter der Verteilung an. Kann man diese nicht angeben, müssen sie aus der Stichprobe geschätzt werden. Hier geht bei der χ^2-Verteilung pro geschätztem Parameter ein Freiheitsgrad verloren. Sie hat also m-w-1 Freiheitsgrade mit w als Zahl der geschätzten Parameter.

Mindestgröße der erwarteten Häufigkeiten

Damit die Prüfgröße als annähernd χ^2-verteilt betrachtet werden kann, muss jede erwartete Häufigkeit eine gewisse Mindestgröße betragen. Verschiedene Lehrwerke setzen diese bei 1 oder 5 an. Ist die erwartete Häufigkeit zu klein, können gegebenenfalls mehrere Klassen zusammengefasst werden, um die Mindestgröße zu erreichen.

Beispiel zu Anpassungstest

Es liegen von ca. 200 börsennotierten Unternehmen die Umsätze vor. Das folgende Histogramm, in SPSS erstellt, zeigt ihre Verteilung.



Es sei x: Umsatz eines Unternehmens [Mio. €].

Es soll nun die Hypothese getestet werden, dass x normalverteilt ist.

Da die Daten in vielen verschiedenen Ausprägungen vorliegen, wurden sie in Klassen eingeteilt. Es ergab sich die Tabelle:

Klasse	**Intervall**		**Beobachtete Häufigkeit**
j	**über**	**bis**	**n_j**
1	...	0	0
2	0	5000	148
3	5000	10000	17
4	10000	15000	5

5	15000	20000	8
6	20000	25000	4
7	25000	30000	3
8	30000	35000	3
9	35000	...	9
Summe			197

Da keine Parameter vorgegeben werden, werden sie aus der Stichprobe ermittelt. Es sind geschätzt

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 6892$$

und

$$\hat{\sigma} = s = 14984.$$

Es wird getestet:

> **H_o: X ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 6892$ und der Varianz $\sigma^2 = 14984^2$.**

Um die erwarteten Häufigkeiten zu bestimmen, werden zunächst die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass X in die vorgegebenen Klassen fällt. Es sei $\Phi(x|6892;14984^2)$ die Verteilungsfunktion der oben angegebenen Normalverteilung an der Stelle x. Man errechnet dann

$$P(X \leq 0) = F_{1o} = \Phi(0|6892; 14984^2) = 0,3228$$
$$P(0 < X \leq 5000) = \Phi(5000|6892; 14984^2) - \Phi(0|6892; 14984^2) = 0,1270$$
...

Daraus ergeben sich die erwarteten Häufigkeiten

$$n_{1o} = n \cdot F_{1o} = 197 \cdot 0,3228 = 63,59$$
$$n_{2o} = 197 \cdot 0,1270 = 25,02$$
...

Es müssten also beispielsweise ca. 25 Unternehmen im Mittel einen Umsatz zwischen 0 und 5000 € haben, wenn das Merkmal Umsatz tatsächlich normalverteilt ist.

Die erwarteten Häufigkeiten sind zusammen mit den beobachteten Häufigkeiten in der folgenden Tabelle aufgeführt.

Klasse	**Intervall**		**Beobachtete Häufigkeit**	**Wahrscheinlichkeit**	**Erwartete Häufigkeit**
j	**über**	**bis**	$\mathbf{n_j}$	$\mathbf{F_{jo}}$	$\mathbf{n_{jo}}$
1	...	0	0	0,3228	63,59
2	0	5000	148	0,1270	25,02
3	5000	10000	17	0,1324	26,08
4	10000	15000	5	0,1236	24,35
5	15000	20000	8	0,1034	20,36
6	20000	25000	4	0,0774	15,25
7	25000	30000	3	0,0519	10,23
8	30000	35000	3	0,0312	6,14
9	35000	...	9	0,0303	5,98
Summe			197	1,0000	197,00

Die Prüfgröße wird jetzt folgendermaßen ermittelt:

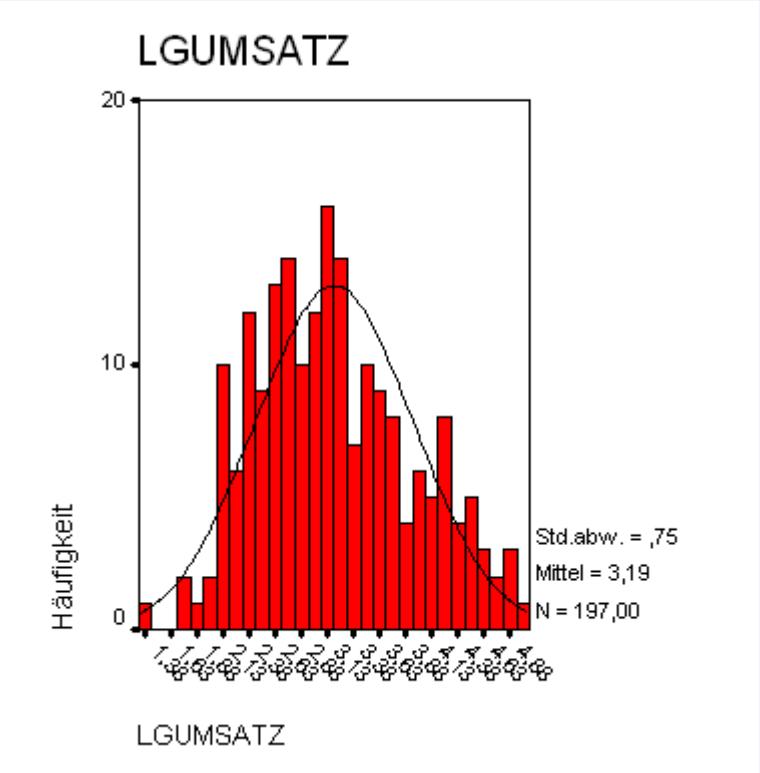
$$\chi^2 = \frac{(0-63,59)^2}{63,59} + \frac{(148-25,02)^2}{25,02} + \ldots + \frac{(9-5,98)^2}{5,98} = 710,79.$$

Bei einem Signifikanzniveau α = 0,05 liegt der kritische Wert der Testprüfgröße bei $\chi^2(0{,}95;9\text{-}2=7) = 14{,}07$. Da $\chi^2 > 14{,}07$ ist, wird die Hypothese abgelehnt. Man kann davon ausgehen, dass das Merkmal Umsatz nicht normalverteilt ist.

Ergänzung [Bearbeiten]

Die Daten wurden logarithmiert. Ein Normalverteilungstest dieser Daten wurde bei einem Signifikanzniveau von 0,05 nicht abgelehnt.

Das folgende Histogramm, in SPSS erstellt, zeigt die Verteilung der logarithmierten Daten.



Unabhängigkeitstest

Siehe auch: Vierfeldertest

Man betrachtet zwei statistische Merkmale x und y, die beliebig skaliert sein können. Man interessiert sich dafür, ob die Merkmale stochastisch unabhängig sind. Es wird die Nullhypothese

> H_o: Das Merkmal x ist vom Merkmal y stochastisch unabhängig.

aufgestellt.

Vorgehensweise

Die Beobachtungen von x liegen in m vielen Kategorien j (j = 1,... m) vor, die des Merkmals y in r vielen Kategorien k (k=1, ..., r) vor. Treten bei einem Merkmal sehr viele Ausprägungen auf, fasst man sie zweckmäßigerweise zu Klassen j zusammen und fasst die Klassenzugehörigkeit als j-te Kategorie auf. Es gibt insgesamt n viele paarweise Beobachtungen von x und y, die sich auf m×r Kategorien verteilen.

Konzeptionell ist der Test so aufzufassen:

Man betrachte zwei diskrete Zufallsvariablen X und Y, deren gemeinsame Wahrscheinlichkeiten in einer Wahrscheinlichkeitstabelle dargestellt werden können.

Man zählt nun, wie oft die j-te Ausprägung von X zusammen mit der k-ten Ausprägung von Y auftritt. Die beobachteten gemeinsamen absoluten Häufigkeiten n_{jk} können in einer zweidimensionalen Häufigkeitstabelle mit m Zeilen und r Spalten eingetragen werden.

	Merkmal y						**Σ**
Merkmal x	1	2	...	k	...	r	$n_{j.}$
1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1k}	...	n_{1r}	$n_{1.}$
2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2k}	...	n_{2r}	$n_{2.}$
...	...	...	...	...	...	...	...
j	...	...	...	n_{jk}	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
m	n_{m1}	n_{m2}	...	n_{mk}	...	n_{mr}	$n_{m.}$
Σ	$n_{.1}$	$n_{.2}$	...	$n_{.k}$	...	$n_{.r}$	n

Die Zeilen- bzw. Spaltensummen ergeben die absoluten Randhäufigkeiten $n_{j.}$ bzw. $n_{.k}$ als

$$n_{j.} = \sum_{k=1}^{r} n_{jk} \quad \text{und} : \quad n_{.k} = \sum_{j=1}^{m} n_{jk}$$.

Entsprechend sind die gemeinsamen relative Häufigkeiten $p_{jk} = n_{jk}/n$ und die relativen Randhäufigkeiten $p_{j.} = n_{j.}/n$ und $p_{.k} = n_{.k}/n$.

Wahrscheinlichkeitstheoretisch gilt: Sind zwei Ereignisse A und B stochastisch unabhängig, ist die Wahrscheinlichkeit für ihr gemeinsames Auftreten gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)$$

Man überlegt sich nun, dass analog zu oben bei stochastischer Unabhängigkeit von x und y auch gelten müsste

$$p_{jk} \approx p_{j.} \cdot p_{.k}$$,

mit n multipliziert entsprechend

$$n_{jk} \approx \frac{n_{j.} \cdot n_{.k}}{n}$$ oder auch

$$n_{jk} - \frac{n_{j.} \cdot n_{.k}}{n} \approx 0$$.

Sind diese Differenzen für sämtliche j,k klein, kann man vermuten, dass x und y tatsächlich stochastisch unabhängig sind.

Setzt man für die erwartete Häufigkeit bei Vorliegen von Unabhängigkeit

$$n^*_{jk} = \frac{n_{j.} \cdot n_{.k}}{n}$$

resultiert aus der obigen Überlegung die Prüfgröße für den Unabhängigkeitstest

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{r} \frac{(n_{jk} - n^*_{jk})^2}{n^*_{jk}}$$.

Die Prüfgröße χ^2 ist bei ausreichend großen erwarteten Häufigkeiten n_{jk}* annähernd χ^2-verteilt mit (m-1)(r-1) Freiheitsgraden.

Wenn die Prüfgröße klein ist, wird vermutet, dass die Hypothese wahr ist. Also wird H_o bei einem hohen Prüfgrößenwert abgelehnt, der Ablehnungsbereich für H_o liegt rechts.

Bei einem Signifikanzniveau α wird H_o abgelehnt, wenn $\chi^2 > \chi^2(1-\alpha; (m-1)(r-1))$, dem (1-α)-Quantil der χ^2-Verteilung mit (m-1)(r-1) Freiheitsgraden ist.

Besonderheiten

Damit die Prüfgröße als annähernd χ^2-verteilt betrachtet werden kann, muss jede erwartete Häufigkeit eine gewisse Mindestgröße betragen. Verschiedene Lehrwerke setzen diese bei 1 oder 5 an. Ist die erwartete Häufigkeit zu klein, können gegebenenfalls mehrere Klassen zusammengefasst werden, um die Mindestgröße zu erreichen.

Beispiel zu Unabhängigkeitstest

Im Rahmen des Qualitätsmanagements wurden die Kunden einer Bank befragt, unter anderem nach ihrer Zufriedenheit mit der Geschäftsabwicklung und nach der Gesamtzufriedenheit. Der Grad der Zufriedenheit richtete sich nach dem Schulnotensystem.

Die Daten wurden in SPSS verarbeitet. Es ergab sich die unten folgende Kreuztabelle der Gesamtzufriedenheit von Bankkunden versus ihrer Zufriedenheit mit der Geschäftsabwicklung. Man sieht, dass einige erwartete Häufigkeiten zu klein waren.

Zufriedenheit insgesamt * Zufriedenheit Geschäftsabwicklung Crosstabulation

Count

		Zufriedenheit Geschäftsabwicklung						
		1	2	3	4	5	6	Total
Zufriedenheit insgesamt	1	86	16	0	0	0	0	102
	2	160	174	23	2	0	0	359
	3	23	72	26	4	3	0	128
	4	1	7	7	4	0	0	19
	5	0	4	3	2	1	1	11
	6	0	0	0	1	1	0	2
Total		270	273	59	13	5	1	621

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	351,675[a]	25	,000

a. 24 cells (66,7%) have expected count less than 5. The minimum expected count is ,00.

Eine Reduzierung der Kategorien auf jeweils drei, ergab methodisch korrekte Ergebnisse.

Zufriedenheit insgesamt * Zufriedenheit Geschäftsabwicklung Crosstabulation

Count

		Zufriedenheit Geschäftsabwicklung			
		1	2	3	Total
Zufriedenheit insgesamt	1	86	16	0	102
	2	160	174	25	359
	3	24	83	53	160
Total		270	273	78	621

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	167,187[a]	4	,000
N of Valid Cases	621		

a. 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 12,81.

Die folgende Tabelle enthält die erwarteten Häufigkeiten n_{jk}*, die sich so berechnen:

$$n_{11}^* = \frac{102 \cdot 270}{621} = 44,35 \quad n_{12}^* = \frac{102 \cdot 273}{621} = 44,84 \quad \ldots \quad n_{33}^* = \frac{160 \cdot 78}{621} = 20$$

	Merkmal y			
Merkmal x	1	2	3	**Σ**
1	44,35	44,84	12,81	102
2	156,09	157,82	45,09	359
3	69,57	70,34	20,10	160
Σ	270	273	78	621

Die Prüfgröße wird dann folgendermaßen ermittelt:

$$\chi^2 = \frac{(86-44,35)^2}{44,35} + \frac{(16-44,84)^2}{44,84} + ... + \frac{(53-20,10)^2}{20,10} = 167,187$$

Bei einem α = 0,05 liegt der kritische Wert der Testprüfgröße bei $\chi^2(0,95;4) = 9,488$. Da $\chi^2 >$ 9,488 ist, wird die Hypothese abgelehnt, man vermutet also, dass die Gesamtzufriedenheit von der Zufriedenheit mit der Geschäftsabwicklung beeinflusst wurde.

Tabelle

f / 1-α	**.900**	**.950**	**.975**	**.990**	**.995**	**.999**
1	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.83
2	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	13.82
3	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	16.27
4	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	18.47
5	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	20.52
6	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46
7	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32
8	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95	26.12
9	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88
10	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59

11	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76	31.26
12	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91
13	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53
14	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12
15	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70
16	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25
17	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79
18	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31
19	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82
20	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.31
21	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80
22	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27
23	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73
24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18
25	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62

26	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05
27	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64	55.48
28	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89
29	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30
30	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70
40	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40
50	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66
60	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95	99.61
70	85.53	90.53	95.02	100.43	104.21	112.32
80	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32	124.84
90	107.57	113.15	118.14	124.12	128.30	137.21
100	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17	149.45
200	226.02	233.99	241.06	249.45	255.26	267.54
300	331.79	341.40	349.87	359.91	366.84	381.43
400	436.65	447.63	457.31	468.72	476.61	493.13

500	540.93	553.13	563.85	576.49	585.21	603.45

CHAID

CHAID (*Chi-square Automatic Interaction Detectors*) ist ein Algorithmus, der zur Entscheidungsfindung dient. Er wird bei Entscheidungsbäumen eingesetzt.

Der CHAID-Algorithmus wurde 1964 erstmals von J.A. Sonquist und J.N. Morgan publiziert und ist somit der Älteste der gängigen Entscheidungsbaum-Algorithmen. Anderberg 1973 beschreibt ihn. J.A. Hartigan 1975 gibt eine Implementierung an.

Literatur:
Sonquist, J.A. and Morgan, J.N. (1964). The Detection of Interaction Effects. Survey Research Center, Institute for Social Research, University of Michigan, Ann Arbor.
Anderberg, M.R. (1973). Cluster Analysis for Applications. New York - Academic Press.
Hartigan, J.A. (1975). Clustering Algorithms. New York - Wiley.

Der Hauptunterschied von CHAID zu CART und C4.5 besteht darin, dass der CHAID-Algorithmus das Wachsen des Baumes stoppt, bevor der Baum zu groß geworden ist. Der Baum wird also nicht beliebig wachsen gelassen, um ihn hinterher mit einer Pruning-Methode wieder zu stutzen. Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass CHAID mit kategorial skalierten Variablen wie Farbe (rot, gelb, grün) oder Bewertung (gut, mittel, schlecht) arbeitet anstatt mit metrisch skalierten Variablen wie zum Beispiel Körpergröße in cm.

Für die Wahl der Attribute wird hier der Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest verwendet. CHAIDs kommen zur Anwendung, wenn eine Aussage über die Abhängigkeit zweier Variablen gemacht werden muss. Dazu wird eine Kennzahl, der *Chi-Quadrat-Abstand* berechnet. Dabei gilt: Je größer die Kennzahl, desto größer die Abhängigkeit der betrachteten Variablen. Die Variable mit dem größten Chi-Quadrat-Abstand zur Zielgröße wird als Attributauswahl berücksichtigt. Um die Trennqualität zu erhöhen, können hier - wie auch beim C4.5-Algorithmus - mehr als zwei Verzweigungen pro Knoten vorgenommen werden. Dies hat zur Folge, dass die generierten Bäume kompakter sind als die CARTs. Dieselbe Methode wird zur Ermittlung der besten Unterteilungen verwendet. Da bei diesen Entscheidungsbäumen alle möglichen Kombinationen von Ausprägungen ausgewertet werden müssen, kann es bei großen Datenmengen zu Laufzeitproblemen führen. Deshalb ist es von Vorteil, wenn die numerischen Variablen in Variablen mit kategoriellen Ausprägungen umgewandelt werden, obwohl dies einen zusätzlichen Aufwand bedeutet. Dafür sollte das Ergebnis qualitativ besser sein.