

Übungsaufgaben: Blatt 3

Aufgabe 7 Duale Tripel

Zeigen Sie, dass die folgenden Paare von T-Norm \top und T-Konorm \perp dual bzgl. der Standardnegation $\sim a = 1 - a$ sind:

- a) $\top_{\min}(a, b) = \min\{a, b\}$ und $\perp_{\max}(a, b) = \max\{a, b\}$,
b) $\top_{\text{prod}}(a, b) = ab$ und $\perp_{\text{sum}}(a, b) = a + b - ab$,
c) $\top_{\text{Luka}}(a, b) = \max\{a + b - 1, 0\}$ und $\perp_{\text{Luka}}(a, b) = \min\{a + b, 1\}$.

(Erinnerung: Eine T-Norm \top und eine T-Konorm \perp heißen dual bzgl. einer Negation \sim wenn die Fuzzy-Versionen der DeMorganschen Gesetze gelten.)

Aufgabe 8 Generatorfunktionen

Eine Möglichkeit Fuzzy-Negationen zu bestimmen, ist das Konzept der Generatorfunktionen. Eine wachsende Generatorfunktion ist eine stetige und streng monoton wachsende Funktion $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(0) = 0$. Es sei g^{-1} die Umkehrfunktion von g . Mit Hilfe solcher Generatorfunktionen kann eine involutive Fuzzy-Negation berechnet werden als

$$\sim a = g^{-1}(g(1) - g(a)),$$

Welche Fuzzy-Negation erhält man mit einer Generatorfunktion $g(a) = c \cdot a$, mit $c > 0$? Berechnen Sie unter Verwendung der mit Hilfe von $g(a) = \sqrt{a}$ erhaltenen Fuzzy-Negation die Funktionswerte $\sim a$ für $a = 0.2$, $a = 0.5$ und $a = 0.7$!

Aufgabe 9 Generatorfunktion

Beweisen Sie, dass eine von einer beliebigen (wachsenden) Generatorfunktion induzierte Fuzzy-Negation involutiv ist, d.h., dass gilt $\forall x \in [0, 1] : x = \sim \sim x$.

Aufgabe 10 Generatorfunktionen

Betrachten Sie noch einmal Definition einer wachsenden Generatorfunktion aus Aufgabe 8. Neben Negationen können mit Hilfe von g auch archimedische T-Normen und T-Konormen bestimmt werden:

$$\top(a, b) = g^{(-1)}(g(a) + g(b) - g(1)),$$
$$\perp(a, b) = g^{(-1)}(g(a) + g(b)).$$

Hierbei ist $g^{(-1)}$ die sog. *Pseudo-Inverse* der Funktion und definiert als

$$g^{(-1)}(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a < 0, \\ g^{-1}, & \text{falls } 0 \leq a \leq g(1), \\ 1, & \text{falls } a > g(1). \end{cases}$$

Betrachten Sie die die wachsende Generatorfunktion

$$g(a) = \frac{2}{3}a^2$$

und bestimmen Sie die durch diese Funktion induzierte T-Norm und T-Konorm. Skizzieren Sie die resultierenden Funktionen. Legen Sie dazu jeweils Eines der Argumente auf verschiedene Werte fest (zeichnen Sie also z.B. $\top(x, 0.25)$, $\top(x, 0.5)$ und $\top(x, 0.75)$).