Fuzzy-Systeme WS 2006/2007
Prof. Dr. R. Kruse, F. Rügheimer

Übungsaufgaben: Blatt 2

Aufgabe 4 Schnitt und Vereinigung von Fuzzy-Mengen

Seien $\mu : X \to [0,1]$, $\nu : X \to [0,1]$ zwei Fuzzy-Mengen mit

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 1 \\ 1-(x-2)^2 & \text{für } x > 1 \wedge x \leq 2 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{1}{3}x & \text{für } x > 0 \wedge x \leq 3 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

In Analogie zum Vorgehen bei der Beschreibung der klassischer Mengenoperation $\cap$ anhand von Verknüpfungen der charakterisitschen Funktionen in Aufgabe 3 kann der Schnitt von Fuzzy-Mengen durch elementweises Verknüpfen der Zugehörigkeitsgrade mittels einer Fuzzy-Konjunktion bestimmt werden.
Wenden Sie die t-Normen $\top_{\min}(a,b) = \min\{a,b\}$, $\top_{Luka}(a,b) = \max\{0, a+b-1\}$ und $\top_{prod}(a,b) = a \cdot b$ auf die beiden Fuzzy-Mengen an. Skizzieren Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 5 Fuzzy-Konjunktion

Beweisen Sie folgende in der Vorlesung angesprochene Beziehung:
Für alle t-Normen $\top$ und alle Fuzzy-Wahrheitswerte $a, b \in [0,1]$ gilt

$$\top_{-1}(a,b) \leq \top(a,b) \leq \top_{\min}(a,b),$$

dabei sei $\top_{\min}(a,b) = \min\{a,b\}$ die Standard-Fuzzy-Konjunktion und $\top_{-1}$ das sogenannte drastische Produkt

$$\top_{-1}(a,b) = \begin{cases} a, & \text{if } b = 1, \\ b, & \text{if } a = 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Aufgabe 6 Fuzzy-Konjunktion

Beweisen Sie folgenden Satz:
Die Standard-Fuzzy-Konjunktion $\top_{\min}(a,b) = \min\{a,b\}$ ist die einzige idempotente t-Norm.
(Hinweis: Idempotenz bedeutet, dass $\forall a \in [0,1] : \top(a,a) = a$.)

Aufgabe 7 Verbände/Boolesche Algebren

Der Übergang von Logik zu Mengentheorie ist deshalb möglich, weil beiden Systemen die gleiche Struktur zugrunde liegt. Die Struktur entspricht der algebraischen Notation einer Booleschen Algebra. Eine Boolesche Algebra ist eine Menge B zusammen mit zwei zweistelligen Funktionen $\sqcap, \sqcup : B \times B \to B$ und einer einstelligen Funktion $\overline{} : B \to B$, für die die folgenden Axiome für alle $a, b, c \in B$ gelten:

1)	$(a \sqcup b) \sqcup c = a \sqcup (b \sqcup c)$,	$(a \sqcap b) \sqcap c = a \sqcap (b \sqcap c)$	(Assoziativität)
2)	$a \sqcup b = b \sqcup a$,	$a \sqcap b = b \sqcap a$	(Kommutativität)
3)	$(a \sqcup b) \sqcap a = a$,	$(a \sqcap b) \sqcup a = a$	(Absorption)
4)	$a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$,	$a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$	(Distributivität)
5)	$a \sqcup (b \sqcap \overline{b}) = a$,	$a \sqcap (b \sqcup \overline{b}) = a$	

Wenn nur die ersten drei Axiome erfüllt sind, wird die Struktur Verband genannt, wenn die ersten vier Axiome erfüllt sind, heißt sie distributiver Verband.
Zeigen Sie, dass die Menge der Wahrheitswerte (das reelle Intervall $[0, 1]$) mit den Standard-Fuzzy-Operatoren $\top(a, b) = \min\{a, b\}$ (Konjunktion), $\bot(a, b) = \max\{a, b\}$ (Disjunktion) und $\sim a = 1 - a$ (Negation) einen distributiven Verband, aber keine Boolesche Algebra bildet.