Lösung zu Aufgabe 19

Raumkomplexität

Für eine beliebige Eingabe n, $n > 2$, benutzt die Registermaschine aus Beispiel 3.8 außer dem Akkumulator genau die Register c_1 (z.B. in Befehl 1), c_2 (z.B. in Befehl 5) und c_3 (z.B. in Befehl 12). Die Raumkomplexität $s_M(n)$ beträgt daher 3 für alle $n > 2$. Damit ist auch die durchschnittliche und die maximale Raumkomplexität für Eingaben der Größe 2 (bei Verwendung der Dezimaldarstellung) gleich 3. Es ist also $S_M(2) = \overline{S_M(2)} = 3$

Zeitkomplexität

Zur Lösung der Aufgabe bestimmen wir zunächst allgemeine Formeln für die Zahl der ausgeführten Befehle für den Fall, daß die Eingabe n, $n > 2$, eine Primzahl ist, und den Fall, daß die Eingabe n, $n > 2$, eine teilbare Zahl ist. Im ersten Fall hängt die Zahl der Befehle von der Eingabe n ab, im zweiten vom kleinsten Teiler $d_{\min}$ von n.

Zeitkomplexität für eine Primzahl

Da wir $n > 2$ annehmen, wird auf jeden Fall der Anfang der Testschleife (Befehl 5) erreicht. Dazu sind 4 Befehle auszuführen. Die aus den Befehlen 5 bis 18 bestehende Schleife (14 Befehle) wird für jeden Testteiler $d \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ einmal durchlaufen, insgesamt also $(n-2)$-mal. Dabei wird in Befehl 15 nie gesprungen, da wir ja annehmen, daß n eine Primzahl ist und folglich keine Teiler in $\{2, 3, \ldots, n-1\}$ besitzt. Für $d = n$ schließlich wird die Schleife durch einen Sprung in Befehl 8 beendet. D.h. es werden noch die Befehle 5 bis 8, 19 und 20 ausgeführt, insgesamt also 6 Befehle (der `END`-Befehl wird nach Definition nicht gezählt). Damit erhalten wir insgesamt $10 + (n-2) \cdot 14$ Befehle.

Zeitkomplexität für eine teilbare Zahl

Da wir $n > 2$ annehmen, wird auf jeden Fall der Anfang der Testschleife (Befehl 5) erreicht. Dazu sind 4 Befehle auszuführen. Sei $d_{\min}$ der kleinste Teiler von n. Die aus den Befehlen 5 bis 18 bestehende Schleife (14 Befehle) wird für jeden Testteiler $d \in \{2, 3, \ldots, d_{\min} - 1\}$ einmal durchlaufen, insgesamt also $(d_{\min} - 2)$-mal. Dabei wird in Befehl 15 nicht gesprungen, da wir ja annehmen, daß $d_{\min}$ der kleinste Teiler von n ist. Für $d = d_{\min}$ schließlich wird die Schleife durch einen Sprung in Befehl 15 beendet. D.h. es werden noch die Befehle 5 bis 15 und 20 ausgeführt, insgesamt also 12 Befehle (der `END`-Befehl wird nach Definition nicht gezählt). Damit erhalten wir insgesamt $16 + (d_{\min} - 2) \cdot 14$ Befehle.

Eingaben 77 und 37

Mit den gefundenen Formeln läßt sich die Zeitkomplexität für die Eingaben 77 und 37 leicht bestimmen. Da $77 = 7 \cdot 11$, ist 7 der kleinste Teiler von 77. Folglich werden insgesamt $16 + (7-2) \cdot 14 = 86$ Befehle ausgeführt. Es ist also $t_M(77) = 86$.

37 ist eine Primzahl. Folglich werden insgesamt $10 + (37-2) \cdot 14 = 500$ Befehle ausgeführt. Es ist also $t_M(37) = 500$.

Durchschnittliche Zeitkomplexität für Eingaben der Größe 2

Eingaben der Größe 2 (bei Verwendung der Dezimaldarstellung) sind die Zahlen 10 bis 99, also 90 Zahlen. Für jede dieser Zahlen ist die Zeitkomplexität zu berechnen. Die Summe der erhaltenen Befehlszahlen geteilt durch 90 ist die durchschnittliche Zeitkomplexität. Bei der Untersuchung der Zahlen 10 bis 99 gehen wir wie beim Sieb des Eratosthenes vor.

Wir betrachten zunächst die geraden Zahlen, d.h. die Zahlen 10, 12, ..., 98. Dies sind offenbar 45 Zahlen. Für jede dieser Zahlen ist $d_{\min} = 2$, folglich benötigt die Registermaschine für jede dieser Zahlen $16 + (2-2) \cdot 14 = 16$ Befehle, insgesamt also $45 \cdot 16 = 720$ Befehle.

Als nächstes untersuchen wir die durch 3 teilbaren Zahlen, d.h. die Zahlen 12, 15, ..., 99. Dies sind offenbar 30 Zahlen. Jede zweite dieser Zahlen, angefangen mit 12, ist gerade, wurde also schon behandelt. Es bleiben folglich 15 Zahlen, für die $d_{\min} = 3$. Für jede dieser Zahlen benötigt die Registermaschine $16 + (3-2) \cdot 14 = 30$ Befehle, insgesamt also $15 \cdot 30 = 450$ Befehle.

Durch 4 teilbare Zahlen brauchen wir aus bekannten Gründen nicht zu betrachten: Sie müssen gerade sein, und folglich wurden sie schon behandelt. Fahren wir daher mit den durch 5 teilbaren Zahlen fort, d.h. mit den Zahlen 10, 15, ..., 95. Dies sind offenbar 18 Zahlen. Jede zweite dieser Zahlen, beginnend mit 10, ist gerade, wurde also schon behandelt. Bleiben 9 Zahlen. Von diesen sind 15, 45 und 75 durch drei teilbar, wurden also auch schon behandelt. Damit bleiben 6 Zahlen übrig, nämlich $5 \cdot 5 = 25$, $5 \cdot 7 = 35$, $5 \cdot 11 = 55$, $5 \cdot 13 = 65$, $5 \cdot 17 = 85$ und $5 \cdot 19 = 95$. Für jede dieser Zahlen ist $d_{\min} = 5$, folglich benötigt die Registermaschine für jede dieser Zahlen $16 + (5-2) \cdot 14 = 58$ Befehle, insgesamt also $6 \cdot 58 = 348$ Befehle.

Durch 6 teilbare Zahlen können wir aus den gleichen Gründen überspringen wie durch 4 teilbare Zahlen. Die einzigen Zahlen zwischen 10 und 99, deren kleinster Teiler 7 ist, sind offenbar $7 \cdot 7 = 49$, $7 \cdot 11 = 77$ und $7 \cdot 13 = 91$. Da dies drei Zahlen sind und die Registermaschine für jede dieser Zahlen $16 + (7-2) \cdot 14 = 86$ Befehle benötigt, ergeben sich insgesamt $3 \cdot 86 = 258$ Befehle.

Da wir durch 8 teilbare Zahlen aus den gleichen Gründen vernachlässigen können wie durch 4 teilbare, und durch 9 teilbare Zahlen auch durch 3 teilbar sind, also schon behandelt wurden, müssen alle verbleibenden Zahlen Primzahlen sein. (Wir haben die Abbruchbedingung des Sieb des Eratosthenes erreicht, da $10 \cdot 10 = 100 > 99$. Also sind alle bisher nicht als teilbar erwiesenen Zahlen Primzahlen.) Diese 21 Primzahlen führen wir in den folgenden Tabellen mit den nach der Formel $10 + (n-2) \cdot 14$ berechneten Befehlszahlen auf.

11	136
13	164
17	220
19	248
23	304
29	388
31	416
$\sum$	1876

37	500
41	556
43	584
47	640
53	724
59	808
61	836
$\sum$	4648

67	920
71	976
73	1004
79	1088
83	1144
89	1228
97	1340
$\sum$	7700

Die Summe der in den drei Tabellen aufgeführten Befehlszahlen ist 14224. Zusammen mit den 720 Befehlen der durch 2, den 450 Befehlen der durch 3, den 348 Befehlen der durch 5 und den 258 Befehlen der durch 7 teilbaren Zahlen erhalten wir folglich insgesamt 16000 Befehle. Im Durchschnitt werden damit für Eingaben der Größe 2 (bei Verwendung der Dezimaldarstellung) $\frac{16000}{90} = 177.\overline{7}$ Befehle ausgeführt. Es ist also $\overline{T_M(2)} = 177.\overline{7}$.

Maximale Zeitkomplexität für Eingaben der Größe 2

Aus den Berechnungen des vorhergehenden Abschnitts läßt sich leicht ablesen, daß sich die maximale Zeitkomplexität für Eingaben der Größe 2 (bei Verwendung der Dezimaldarstellung) gerade für die größte zweistellige Primzahl, also für $n = 97$ ergibt. Es ist daher $T_M(2) = t_M(97) = 1340$.

Überprüfung des Ergebnisses durch eine Simulation

Mit Hilfe des Shellscripts `ex19.csh` kann die Registermaschine aus Beispiel 3.8, wie sie in dem Programm `rmsim.c` implementiert ist, für die Zahlen 10 bis 99 simuliert werden. Für jede Eingabe wird die `step`-Spalte der Ausgabe bei Erreichen des `END`-Befehls ausgelesen und summiert. Am Ende des Shellscripts wird die Gesamtzahl der ausgeführten Befehle ausgegeben. Diese sollte 16000 sein, wie oben berechnet wurde.

Christian Borgelt