6. Übungsblatt
Thema: Entwurf und Analyse von Algorithmen

Aufgabe 25

Mit Hilfe des erweiterten Horner-Schemas können neben den Werten für ein gegebenes Polynom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ an der Stelle x auch die Werte der Ableitungen an der Stelle x bestimmt werden. Erweitern Sie Ihr zu Aufgabe 22 implementiertes Programm derart, daß neben dem Polynomwert alle Werte bis zur n-ten Ableitung ausgegeben werden. Die Berechnung der Ableitungen erfolgt analog zur Polynomwertberechnung (siehe Anlage). Als Eingabe für die Berechnung der i-ten Ableitung dienen die bei der Bestimmung der $(i-1)$-ten Ableitung ermittelten Zwischenergebnisse.
Was können Sie über die Komplexität dieses Algorithmus aussagen?

Aufgabe 26

Schreiben Sie ein Programm mit Rekursion zur Berechnung der Summe der ersten n natürlichen Zahlen! Bestimmen Sie die Zeitkomplexität des Algorithmus!

Hinweis: Für die Programmierung der Sortierverfahren ist es ratsam, ein Rahmenprogramm zu schreiben, das die einzelnen Sortieralgorithmen aufruft und eine Auswertung durchführt.

Aufgabe 27

Schreiben Sie ein Programm zum Sortieren einer ungeordneten Folge von Zahlen mittels *Sortieren durch Einfügen*. Geben Sie für jeden notwendigen Vergleich einen Stern aus und zählen Sie die Gesamtzahl der Vergleiche! Bestimmen Sie die Komplexität des Algorithmus!

Aufgabe 28

Schreiben Sie ein Programm zum Sortieren einer ungeordneten Folge von Zahlen mittels *BubbleSort*. Geben Sie für jeden notwendigen Vergleich einen Stern und für die Vertauschungen ein Pluszeichen aus und zählen Sie die Gesamtzahl der Vergleiche und Vertauschungen. Bestimmen Sie die Komplexität des Algorithmus!
Anmerkung: *BubbleSort* arbeitet wie folgt: Man durchlaufe die gegebene Folge immer wieder von links nach rechts und vertausche jedesmal, wenn es notwendig ist, benachbarte Elemente (wenn diese nicht in der korrekten Reihenfolge stehen). Wenn bei einem Durchlauf keine Vertauschung notwendig ist, ist die Folge sortiert.

Anlage: Erweitertes Horner-Schema

Rechenvorschrift:

$$a_k^{(j)} := a_k^{(j-1)} + x_0 a_{k+1}^{(j)} \text{ mit: } a_k^{(0)} = a_k;\ k = n, n-1, ..., j-1;\ a_{n+1}^{(j)} = 0$$

Schematisch kann das wie folgt dargestellt werden. In Richtung der Pfeile wird jeweils mit x_0 multipliziert und die beiden untereinander stehenden und durch ein ⊕ verbundenen Werte werden addiert und ergeben den entsprechenden Wert in der nächsten Zeile.

$a_k^{(0)}$	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_0
	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$		$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
	0	$x_0a_n^{(1)}$	$x_0a_{n-1}^{(1)}$	...	$x_0a_3^{(1)}$	$x_0a_2^{(1)}$	$x_0a_1^{(1)}$
$x=x_0$	$a_n^{(1)}$	$a_{n-1}^{(1)}$	$a_{n-2}^{(1)}$		$a_2^{(1)}$	$a_1^{(1)}$	$a_0^{(1)}$
	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$		$\oplus$	$\oplus$	
	0	$x_0a_n^{(2)}$	$x_0a_{n-1}^{(2)}$	...	$x_0a_3^{(2)}$	$x_0a_2^{(2)}$	
$x=x_0$	$a_n^{(2)}$	$a_{n-1}^{(2)}$	$a_{n-2}^{(2)}$		$a_2^{(2)}$	$a_1^{(2)}$	
	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$		$\oplus$		
	0	$x_0a_n^{(3)}$	$x_0a_{n-1}^{(3)}$	...	$x_0a_3^{(3)}$		
$x=x_0$	$a_n^{(3)}$	$a_{n-1}^{(3)}$	$a_{n-2}^{(3)}$		$a_2^{(3)}$		
	...						
$x=x_0$	$a_n^{(n+1)}$						

Der Wert des Polynoms $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ für $x=x_0$ ist dann:

$$f(x_0) = a_0^{(1)}$$

Der Wert der Ableitungen an der Stelle $x=x_0$ ist:

$$f'(x_0) = a_1^{(2)}$$
$$f''(x_0) = 2!\ a_2^{(3)}$$
$$...$$
$$f^{(n)}(x_0) = n!\ a_n^{(n+1)}$$

Zahlenbeispiel: $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$

	3	-2	3	-4	5	
	0	6	8	22	36	
$x_0=2$	3	4	11	18	41	0! * 41 = 41 = f(2)
	0	6	20	62		
$x_0=2$	3	10	31	80		1! * 80 = 80 = f'(2)
	0	6	32			
$x_0=2$	3	16	63			2! * 63 = 126 = f''(2)
	0	6				
$x_0=2$	3	22				3! * 22 = 132 = f'''(2)
	0					
$x_0=2$	3					4! * 3 = 72 = $f^{(4)}(2)$