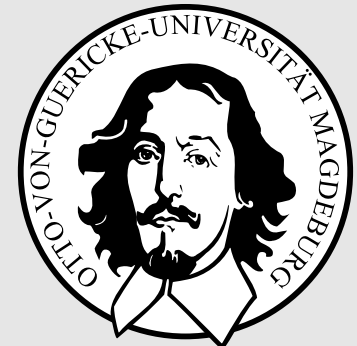


# Neuronale Netze

Prof. Dr. Rudolf Kruse

Computational Intelligence  
Institut für Wissens- und Sprachverarbeitung  
Fakultät für Informatik  
[kruse@iws.cs.uni-magdeburg.de](mailto:kruse@iws.cs.uni-magdeburg.de)



# Zu meiner Person: Rudolf Kruse

- 1979 Dipl. Mathematik (Nebenfach Informatik) von TU Braunschweig
- dort 1980 promoviert, 1984 habilitiert
- 2 Jahre hauptamtlicher Mitarbeiter bei Fraunhofer
- 1986 Ruf als Professor für Informatik der TU Braunschweig
- seit 1996 Professor an der Universität Magdeburg
- **Forschung:** Data Mining, Explorative Datenanalyse, Fuzzy-Systeme, Neuronale Netze, Evolutionäre Algorithmen, Bayes'sche Netze
- `mailto:kruse@iws.cs.uni-magdeburg.de`
- Büro: G29-008, Telefon: 0391 67-58706
- Sprechstunde: Mi., 11:00–12:00 Uhr

# Zur Arbeitsgruppe: Computational Intelligence

## Lehre:

- Intelligente Systeme Bachelor (2 V + 2 Ü, 5 CP)
- Evolutionäre Algorithmen Bachelor (2 V + 2 Ü, 5 CP)
- Neuronale Netze Bachelor (2 V + 2 Ü, 5 CP)
- Fuzzy-Systeme Master (2 V + 2 Ü, 6 CP)
- Bayes-Netze Master (2 V + 2 Ü, 6 CP)
- Intelligente Datenanalyse Master (2 V + 2 Ü, 6 CP)
- (Pro-)Seminare: Information Mining, Computational Intelligence

## Forschungsbeispiele:

- Dynamische Analyse von sozialen Netzen (Pascal Held)
- Analyse und Simulation gepulster neuronaler Netze (Christian Braune)
- Maschinelles Lernen anhand der Zwei-Prozess-Theorie (Christoph Doell)

# Zur Vorlesung

- Vorlesungstermine: Mo., 13:15–14:45 Uhr, G29-307
- Vorlesungsausfall: 21.04.2014 (Ostermontag), 09.06.2014 (Pfingstmontag)
- Vorlesungsende: 30.06.2014
- Informationen zur Vorlesung:  
<http://fuzzy.cs.ovgu.de/wiki/pmwiki.php?n=Lehre.NN2014>
  - wöchentliche Vorlesungsfolien als PDF
  - Übungsblätter ebenfalls
  - wichtige Ankündigungen und Termine!

# Inhalte und Lernziele der Vorlesung

- Einführung in die Grundlagen der (Künstlichen) Neuronalen Netze
- Behandlung von Lernparadigmen und -algorithmen
- Behandlung von verschiedenen Netzmodelle
- Anwendungsbeispiele

# Zur Übung

## Zielsetzung:

- Anwendung von Methoden der Datenanalyse mit Neuronalen Netzen zur Lösung von Klassifikations-, Regressions- und weiteren statistischen Problemen
- Bewertung und Anwendung neuronaler Lernverfahren zur Analyse komplexer Systeme
- Befähigung zur Entwicklung von Neuronalen Netzen

## Ihre Aufgabe:

- Nacharbeiten des Vorlesungsstoffs
- Bearbeitung der Übungsaufgaben
- aktive Teilnahme an den Übungen
- auch: praktische Übungen im Labor

# Durchführung der Übungen

- Sie werden aktiv und erklären Ihre Lösungen!
- Tutor macht auf Fehler aufmerksam und beantwortet Fragen
- das „Vorrechnen“ der Aufgaben ist nicht Sinn der Übung
- ganz bewusst: keine ausgearbeiteten Musterlösungen
- praktische Laborübung wird keine Pflicht sein!
- Tutor: Christoph Doell <mailto:doell@iws.cs.uni-magdeburg.de>
- Raum G29-013, Sprechstunde: immer, wenn Bürotür offen steht

# Übung: 2 Termine zur Auswahl

- Mo., 15:15–16:45 Uhr in Raum G05-307
- Mo., 17:15–18:45 Uhr in Raum G05-307
- Do., 15:15–16:45 Uhr in Raum G05-307 (nur für PNK-Studierende)
- Anmeldung: <https://iws.cs.uni-magdeburg.de:8080/frs/subscribe/NN>
- regulärer Übungsbeginn: heute (Übungsblatt 1)



# Zur Prüfung

- schriftliche Klausur: 120 Minuten
- voraussichtlich Mitte Juli
- Termine, Räume etc. werden in Vorlesung u. WWW angekündigt
- Durchführung ohne Hilfsmittel (nur Taschenrechner)
- nur Schreibmaterial (Stifte/Füller, die blau oder schwarz schreiben)
- Bekanntgabe der Ergebnisse: HISQIS
- Einsichtnahme in die Klausur ist möglich (Termin im WWW)

## **Studierende, die den Kurs mit Prüfung oder benotetem Schein beenden wollen, müssen**

- regelmäßig und gut in Übungen mitarbeiten,
- mind. 50% der Aufgaben votieren,
- mind. 2x Lösung zu schriftlicher Aufgabe präsentieren,
- Klausur nach dem Kurs bestehen

# Schein- und Prüfungskriterien

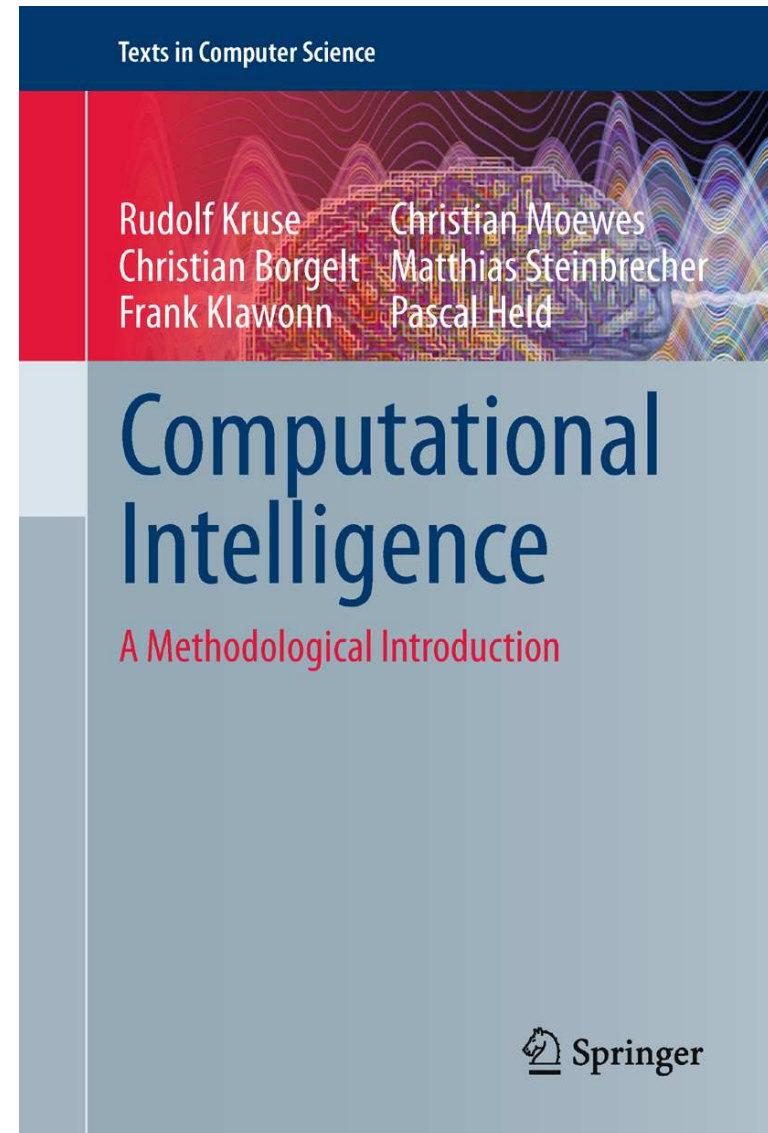
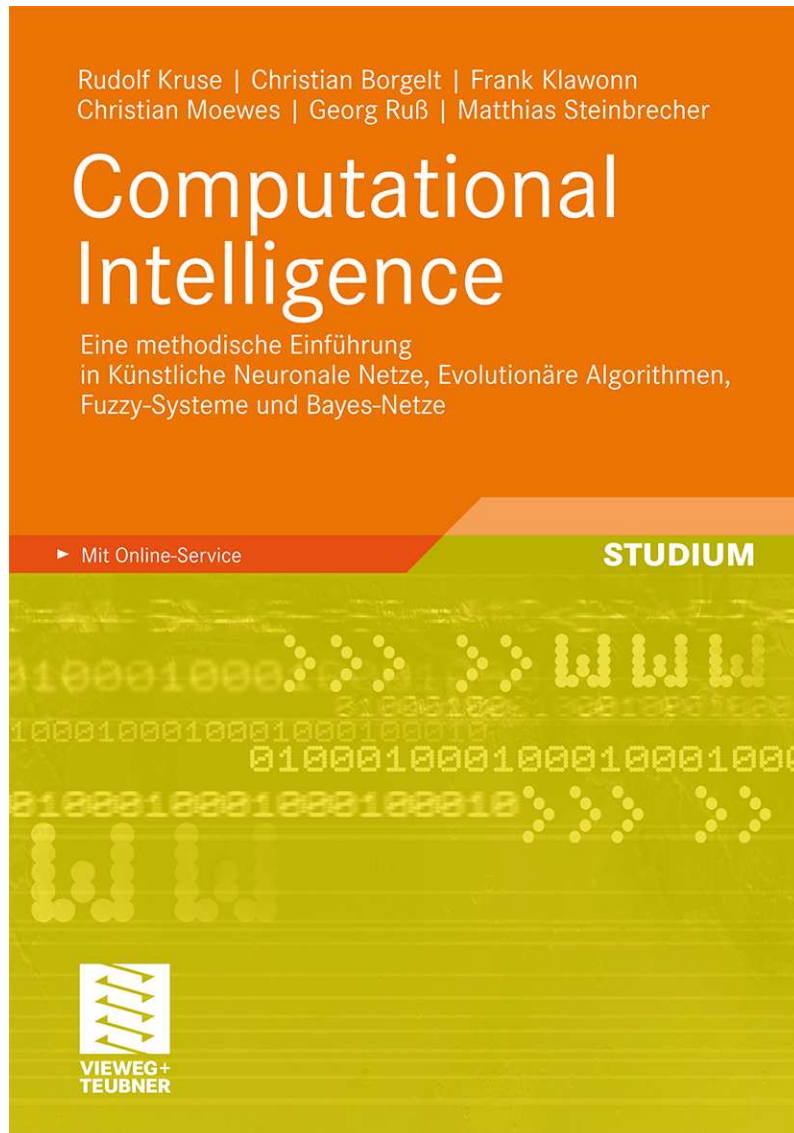
Studierende der **Philosophie-Neurowissenschaften-Kognition**, die den Kurs mit Prüfung oder benotetem Schein beenden wollen, müssen zusätzlich zum oben erwähnten Pensum

- bei mehr als 5 Studierenden: aktiv an einer zusätzlichen Übung teilnehmen,
- bei 5 oder weniger Studierenden: eine Semesteraufgabe bearbeiten (anspruchsvolle, praxisbezogene Aufgabe inkl. Literaturrecherche, Zwischenpräsentation, Programmieren, Evaluieren, Dokumentieren, schriftlicher Ausarbeitung und Abschlussvortrag)
- zusätzliche Übung muss in diesem Semester besucht werden
- Semesteraufgabe kann auch im Wintersemester bearbeitet werden

# Inhalt der Vorlesung

- **Einleitung**  
Motivation, biologischer Hintergrund
- **Schwellenwertelemente**  
Definition, geometrische Deutung, Grenzen, Netze von SWE, Training
- **Allgemeine Neuronale Netze**  
Struktur, Arbeitsweise, Training
- **Mehrschichtige Perzeptren**  
Definition, Funktionsapproximation, Gradientenabstieg, Backpropagation, Varianten, Sensitivitätsanalyse
- **Radiale-Basis-Funktions-Netze**  
Definition, Funktionsapproximation Initialisierung, Training, allgemeine Version
- **Selbstorganisierende Karten**  
Definition, Lernende Vektorquantisierung, Nachbarschaft von Ausgabeneuronen
- **Hopfield-Netze**  
Definition, Konvergenz, Assoziativspeicher, Lösen von Optimierungsproblemen
- **Rekurrente Neuronale Netze**  
Differentialgleichungen, Vektornetze, Backpropagation über die Zeit
- **Support-Vektor-Maschinen**  
Empirische Risikominimierung, statistische Lerntheorie, Kernmethoden

# Bücher zur Vorlesung



# Literatur zur Lehrveranstaltung

Kruse, Borgelt, Klawonn, Moewes, Steinbrecher und Held. *Computational Intelligence: A Methodological Introduction*. Springer, London, 2013.

Kruse, Borgelt, Klawonn, Moewes, Ruß und Steinbrecher. *Computational Intelligence: Eine methodische Einführung in Künstliche Neuronale Netze, Evolutionäre Algorithmen, Fuzzy-Systeme und Bayes-Netze*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2011.

Nauck, Borgelt, Klawonn und Kruse. *Neuro-Fuzzy-Systeme: Von den Grundlagen Neuronaler Netze zu modernen Fuzzy-Systemen*. Vieweg, Wiesbaden, 3. Aufl., 2003.

Rojas. *Theorie der neuronalen Netze: Eine systematische Einführung*. Springer, Berlin, 1993.

Zell. *Simulation neuronaler Netze*. Addison-Wesley, Bonn, 1994.

Haykin. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1994.

Kriesel. *Ein kleiner Überblick über neuronale Netze*. Manuskript, erhältlich auf <http://www.dkriesel.com>, 2007.

# Motivation: Warum (künstliche) neuronale Netze?

- **(Neuro-)Biologie / (Neuro-)Physiologie / Psychologie:**
  - Ausnutzung der Ähnlichkeit zu echten (biologischen) neuronalen Netzen
  - Modellierung zum Verständnis Arbeitsweise von Nerven und Gehirn durch Simulation
- **Informatik / Ingenieurwissenschaften / Wirtschaft**
  - Nachahmen der menschlichen Wahrnehmung und Verarbeitung
  - Lösen von Lern-/Anpassungsproblemen sowie Vorhersage- und Optimierungsproblemen
- **Physik / Chemie**
  - Nutzung neuronaler Netze, um physikalische Phänomene zu beschreiben
  - Spezialfall: Spin-Glas (Legierungen von magnetischen und nicht-magnetischen Metallen)

# Konventionelle Rechner vs. Gehirn

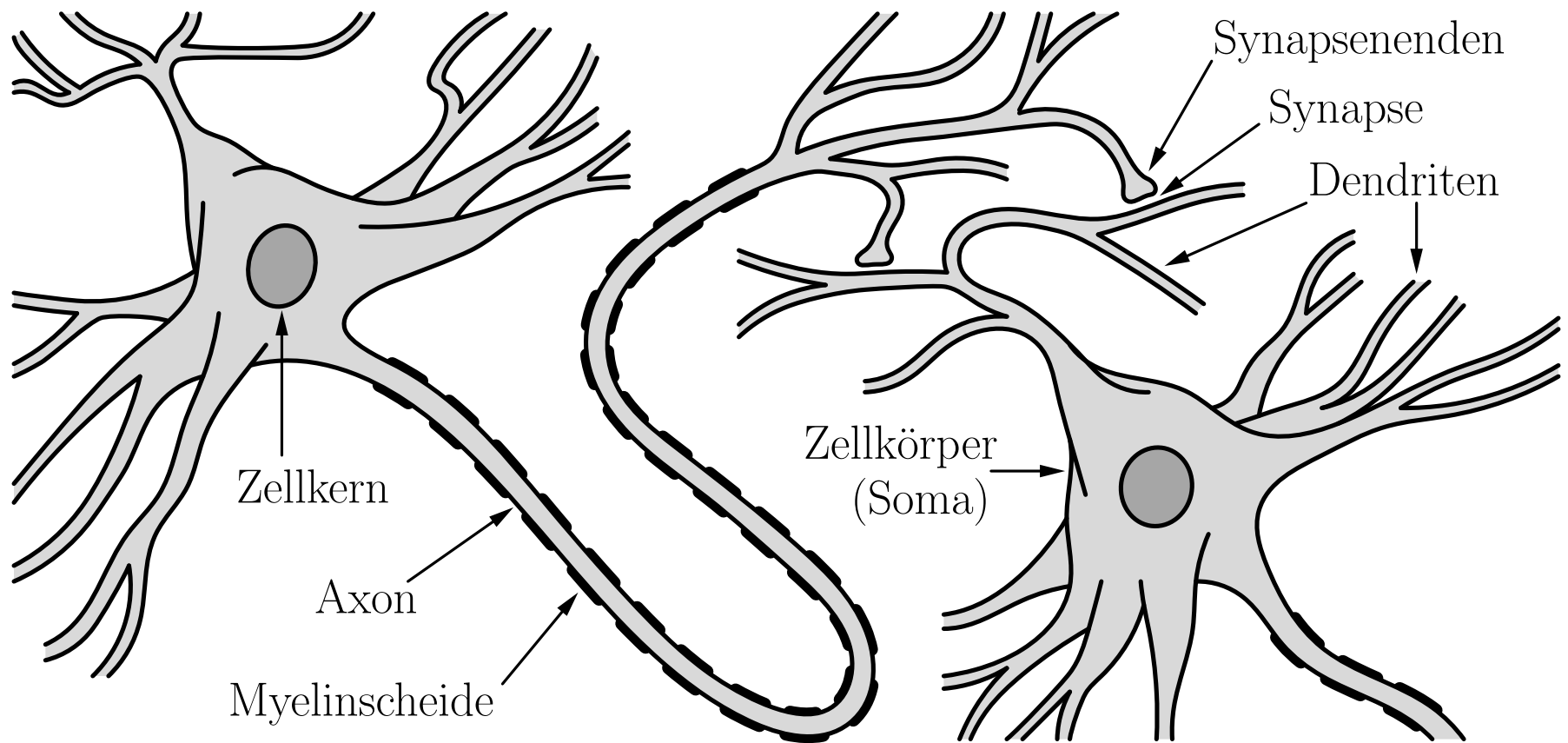
	Computer	Gehirn
Verarbeitungseinheiten	1 CPU, $10^9$ Transistoren	$10^{11}$ Neuronen
Speicherkapazität	$10^9$ Bytes RAM, $10^{10}$ Bytes Festspeicher	$10^{11}$ Neuronen, $10^{14}$ Synapsen
Verarbeitungsgeschwindigkeit	$10^{-8}$ sec.	$10^{-3}$ sec.
Bandbreite	$10^9 \frac{\text{bits}}{\text{s}}$	$10^{14} \frac{\text{bits}}{\text{s}}$
Neuronale Updates pro sec.	$10^5$	$10^{14}$



# Konventionelle Rechner vs. Gehirn

- Beachte: die Hirnschaltzeit ist mit  $10^{-3}$  s recht langsam, aber Updates erfolgen parallel. Dagegen braucht die serielle Simulation auf einem Rechner mehrere hundert Zyklen für ein Update.
- Vorteile neuronaler Netze:
  - Hohe Verarbeitungsgeschwindigkeit durch massive Parallelität
  - Funktionstüchtigkeit selbst bei Ausfall von Teilen des Netzes (Fehlertoleranz)
  - Langsamer Funktionsausfall bei fortschreitenden Ausfällen von Neuronen (*graceful degradation*)
  - Gut geeignet für induktives Lernen
- Es erscheint daher sinnvoll, diese Vorteile natürlicher neuronaler Netze künstlich nachzuahmen.

## Struktur eines prototypischen biologischen Neurons



## (Stark) vereinfachte Beschreibung neuronaler Informationsverarbeitung

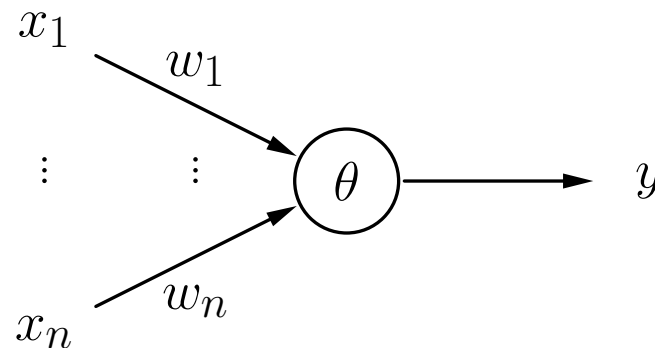
- Das Axonende gibt Chemikalien ab, **Neurotransmitter** genannt.
- Diese bewirken an der Membran des Empfängerendriten die Veränderung der Polarisierung.  
(Das Innere ist typischerweise 70mV negativer als die Außenseite.)
- Abnahme in der Potentialdifferenz: **anregende** Synapse  
Zunahme in der Potentialdifferenz: **hemmende** Synapse
- Wenn genügend anregende Information vorhanden ist, wird das Axon depolarisiert.
- Das resultierende **Aktionspotential** pflanzt sich entlang des Axons fort.  
(Die Geschwindigkeit hängt von der Bedeckung mit Myelin ab.)
- Wenn das Aktionspotential die Synapsenenden erreicht, löst es die Abgabe von Neurotransmittern aus.

# Schwellenwertelemente

# Schwellenwertelemente

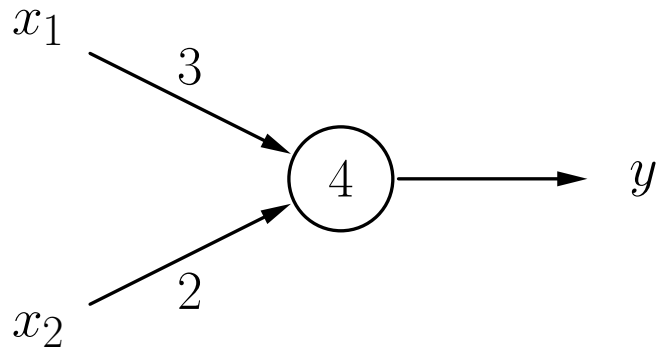
Ein **Schwellenwertelement** (Threshold Logic Unit, TLU) ist eine Verarbeitungseinheit für Zahlen mit  $n$  Eingängen  $x_1, \dots, x_n$  und einem Ausgang  $y$ . Das Element hat einen **Schwellenwert**  $\theta$  und jeder Eingang  $x_i$  ist mit einem **Gewicht**  $w_i$  versehen. Ein Schwellenwertelement berechnet die Funktion

$$y = \begin{cases} 1, & \text{falls } \vec{x}\vec{w} = \sum_{i=1}^n w_i x_i \geq \theta, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



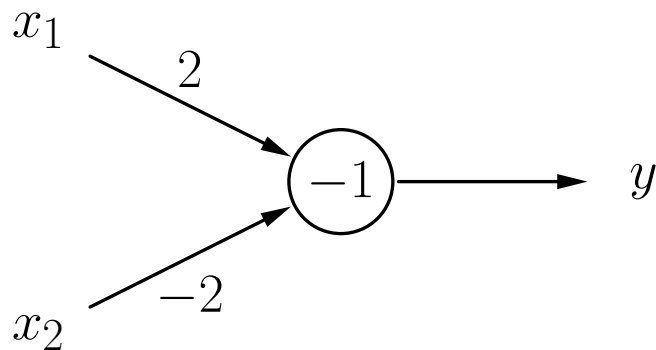
# Schwellenwertelemente: Beispiele

Schwellenwertelement für die Konjunktion  $x_1 \wedge x_2$ .



$x_1$	$x_2$	$3x_1 + 2x_2$	$y$
0	0	0	0
1	0	3	0
0	1	2	0
1	1	5	1

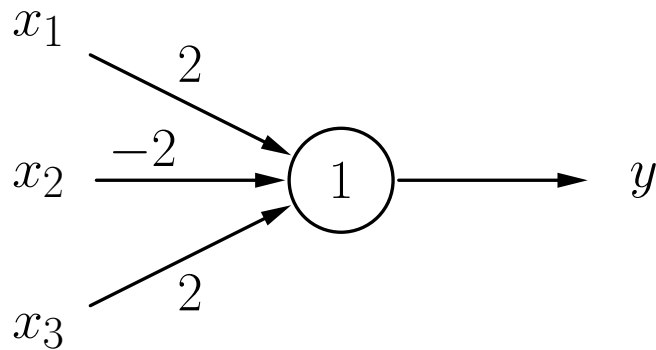
Schwellenwertelement für die Implikation  $x_2 \rightarrow x_1$ .



$x_1$	$x_2$	$2x_1 - 2x_2$	$y$
0	0	0	1
1	0	2	1
0	1	-2	0
1	1	0	1

# Schwellenwertelemente: Beispiele

**Schwellenwertelement für  $(x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3)$ .**



$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\sum_i w_i x_i$	$y$
0	0	0	0	0
1	0	0	2	1
0	1	0	-2	0
1	1	0	0	0
0	0	1	2	1
1	0	1	4	1
0	1	1	0	0
1	1	1	2	1

## Rückblick: Geradendarstellungen

Geraden werden typischerweise in einer der folgenden Formen dargestellt:

Explizite Form:	$g \equiv x_2 = bx_1 + c$
Implizite Form:	$g \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + d = 0$
Punkt-Richtungs-Form:	$g \equiv \vec{x} = \vec{p} + k\vec{r}$
Normalform	$g \equiv (\vec{x} - \vec{p})\vec{n} = 0$

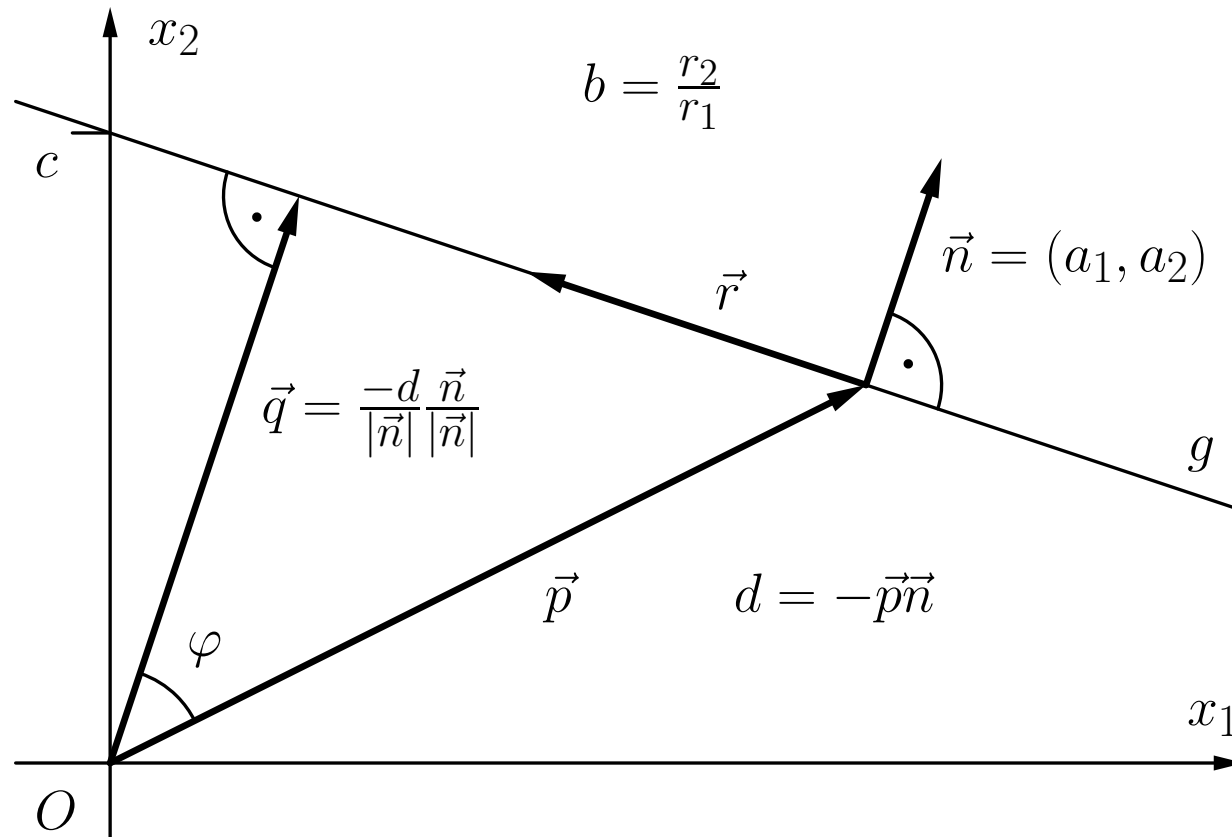
mit den Parametern

- $b$  : Anstieg der Geraden
- $c$  : Abschnitt der  $x_2$ -Achse
- $\vec{p}$  : Vektor zu einem Punkt auf der Gerade (Ortsvektor)
- $\vec{r}$  : Richtungsvektor der Gerade
- $\vec{n}$  : Normalenvektor der Gerade



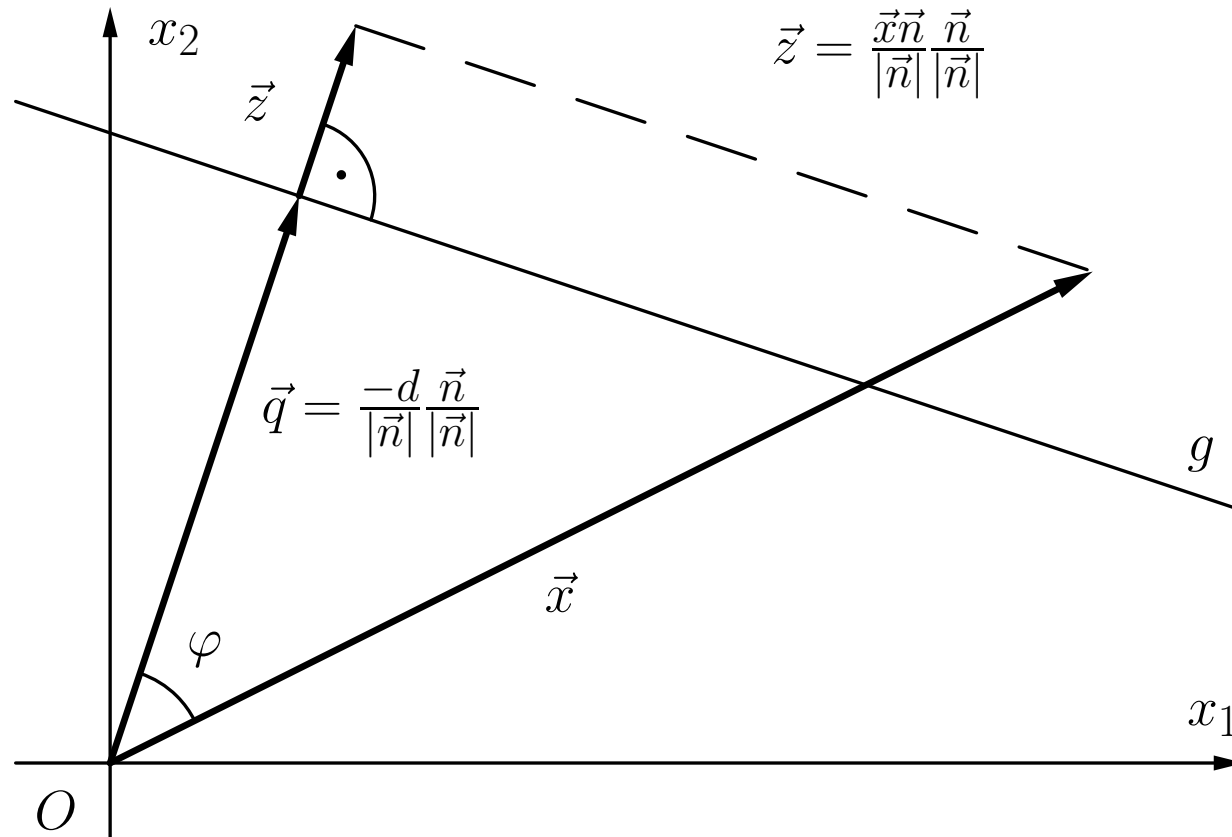
# Schwellenwertelemente: Geometrische Interpretation

Eine Gerade und ihre definierenden Eigenschaften.



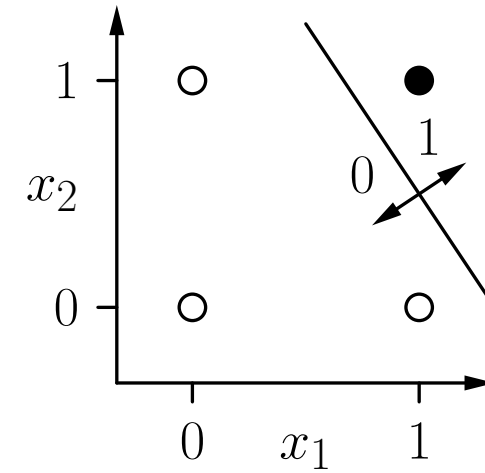
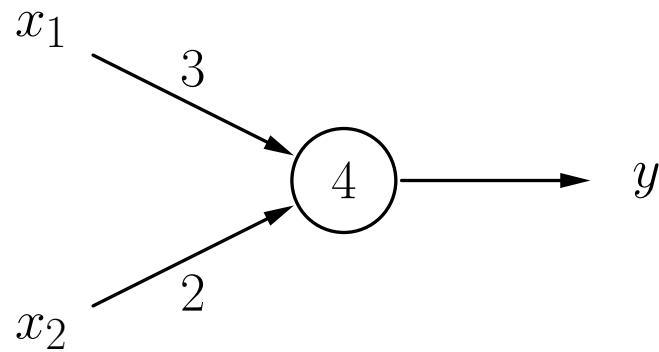
# Schwellenwertelemente: Geometrische Interpretation

Bestimmung, auf welcher Seite ein Punkt  $\vec{x}$  liegt.

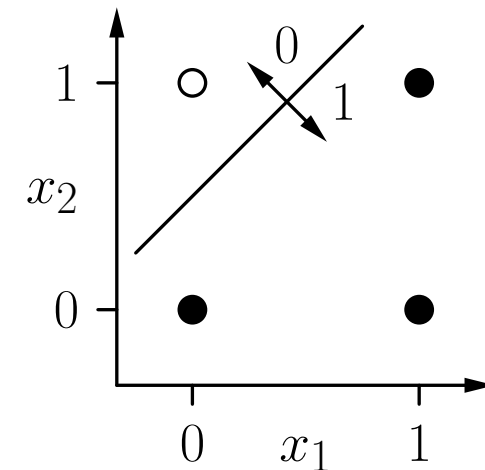
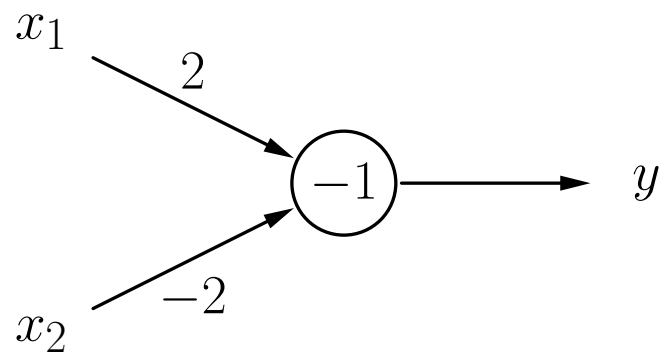


# Schwellenwertelemente: Geometrische Interpretation

Schwellenwertelement für  $x_1 \wedge x_2$ .

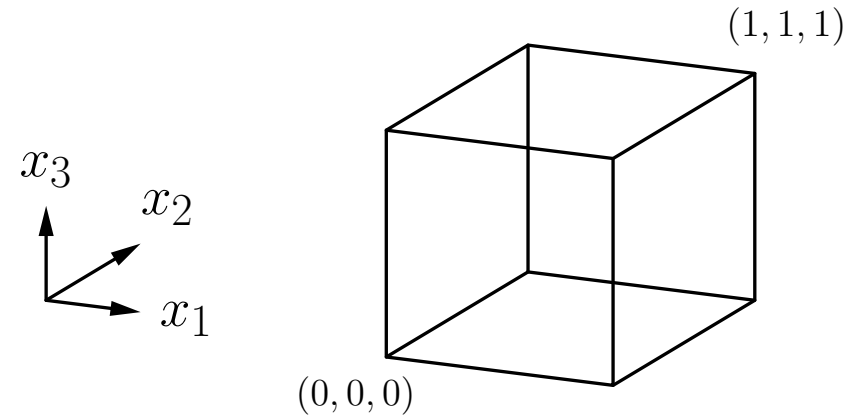


Ein Schwellenwertelement für  $x_2 \rightarrow x_1$ .

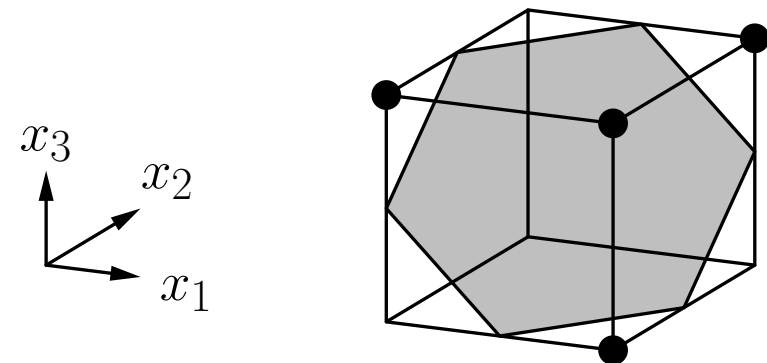
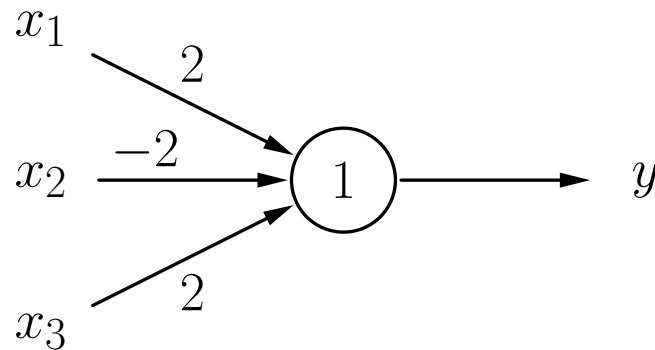


# Schwellenwertelemente: Geometrische Interpretation

Darstellung 3-dimensionaler  
Boolescher Funktionen:



**Schwellenwertelement für  $(x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3)$ .**



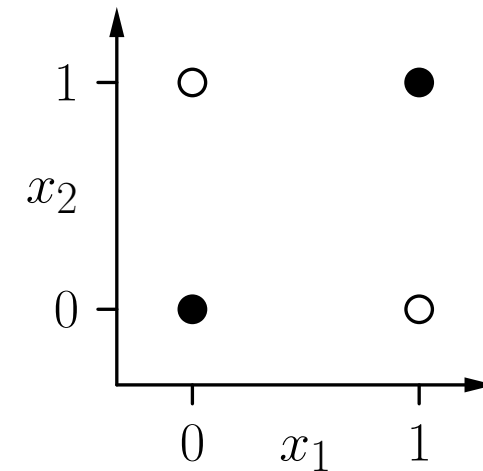
# Schwellenwertelemente: lineare Separabilität

- Zwei Punktmenge in einem  $n$ -dimensionalen Raum heißen linear separabel, wenn sie durch eine  $(n-1)$ -dimensionale Hyperebene getrennt werden können. Die Punkte der einen Menge dürfen dabei auch auf der Hyperebene liegen.
- Eine Boolesche Funktion heißt linear separabel, falls die Menge der Urbilder von 0 und die Menge der Urbilder von 1 linear separabel sind.

# Schwellenwertelemente: Grenzen

Das Biimplikationsproblem  $x_1 \leftrightarrow x_2$ : Es gibt keine Trenngerade.

$x_1$	$x_2$	$y$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1



**Formaler Beweis** durch *reductio ad absurdum*:

$$\text{da } (0, 0) \mapsto 1: \quad 0 \geq \theta, \quad (1)$$

$$\text{da } (1, 0) \mapsto 0: \quad w_1 < \theta, \quad (2)$$

$$\text{da } (0, 1) \mapsto 0: \quad w_2 < \theta, \quad (3)$$

$$\text{da } (1, 1) \mapsto 1: \quad w_1 + w_2 \geq \theta. \quad (4)$$

(2) und (3):  $w_1 + w_2 < 2\theta$ . Mit (4):  $2\theta > \theta$ , oder  $\theta > 0$ . Widerspruch zu (1).

# Schwellenwertelemente: Grenzen

## Vergleich zwischen absoluter Anzahl und der Anzahl linear separabler Boolescher Funktionen.

([Widner 1960] zitiert in [Zell 1994])

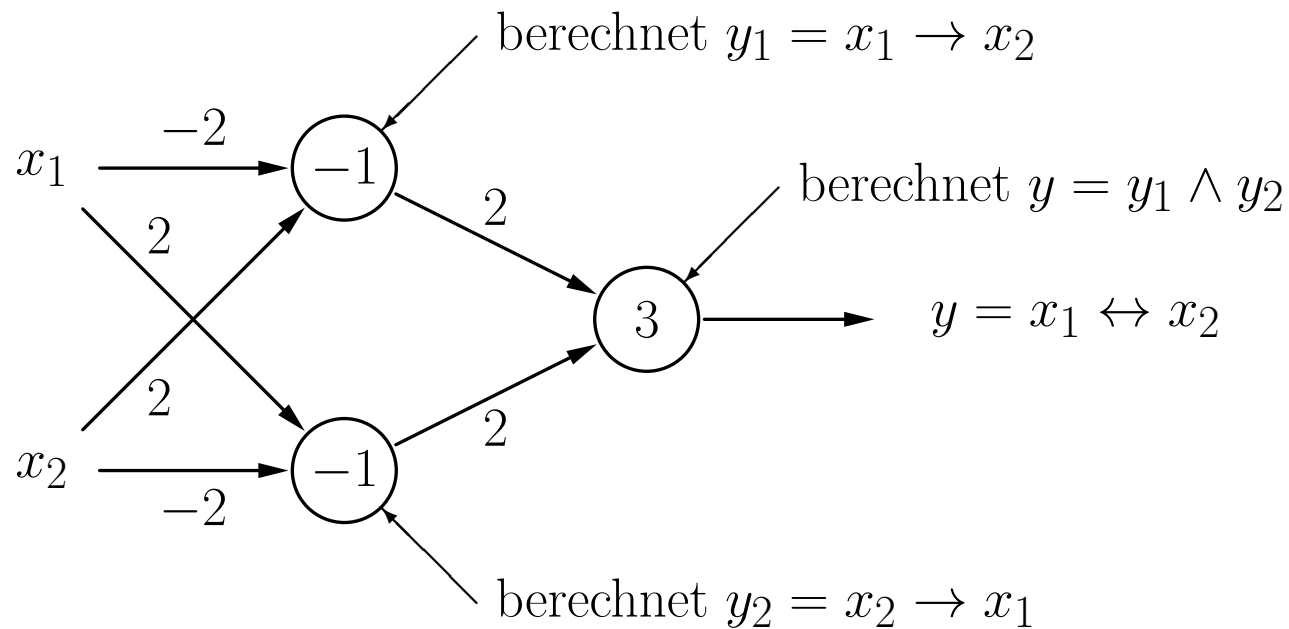
Eingaben	Boolesche Funktionen	linear separable Funktionen
1	4	4
2	16	14
3	256	104
4	65536	1774
5	$4.3 \cdot 10^9$	94572
6	$1.8 \cdot 10^{19}$	$5.0 \cdot 10^6$

- Für viele Eingaben kann ein SWE fast keine Funktion berechnen.
- Netze aus Schwellenwertelementen sind notwendig, um die Berechnungsfähigkeiten zu erweitern.

# Netze aus Schwellenwertelementen

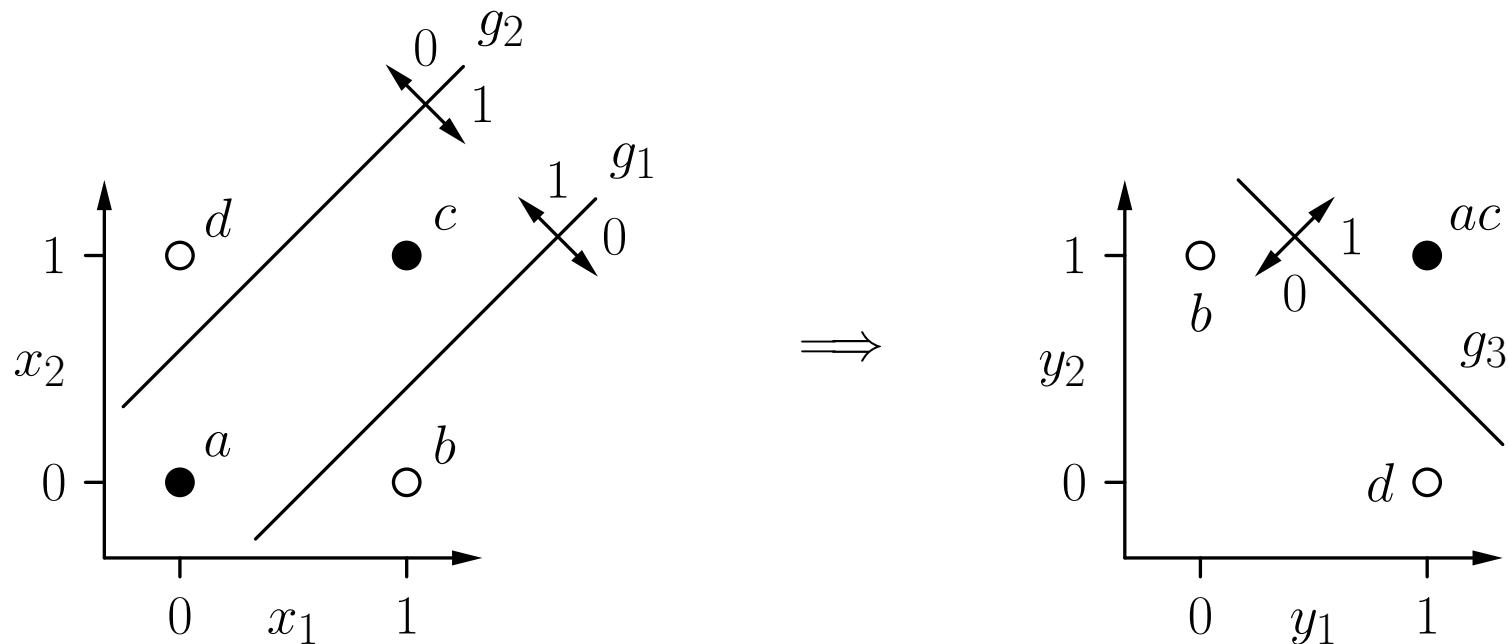
## Biimplikationsproblem, Lösung durch ein Netzwerk.

Idee: logische Zerlegung  $x_1 \leftrightarrow x_2 \equiv (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_1)$





## Lösung des Biimplikationsproblems: Geometrische Interpretation



- Die erste Schicht berechnet neue Boolesche Koordinaten für die Punkte.
- Nach der Koordinatentransformation ist das Problem linear separabel.

# Darstellung beliebiger Boolescher Funktionen

Sei  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  eine Boolesche Funktion mit  $n$  Variablen.

(i) Stelle  $f(x_1, \dots, x_n)$  in disjunktiver Normalform dar. D.h. bestimme  $D_f = K_1 \vee \dots \vee K_m$ , wobei alle  $K_j$  Konjunktionen von  $n$  Literalen sind, d.h.,  $K_j = l_{j1} \wedge \dots \wedge l_{jn}$  mit  $l_{ji} = x_i$  (positives Literal) oder  $l_{ji} = \neg x_i$  (negatives Literal).

(ii) Lege ein Neuron für jede Konjunktion  $K_j$  der disjunktiven Normalform an (mit  $n$  Eingängen — ein Eingang pro Variable), wobei

$$w_{ji} = \begin{cases} 2, & \text{falls } l_{ji} = x_i, \\ -2, & \text{falls } l_{ji} = \neg x_i, \end{cases} \quad \text{und} \quad \theta_j = n - 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_{ji}.$$

(iii) Lege ein Ausgabeneuron an (mit  $m$  Eingängen — ein Eingang für jedes Neuron, das in Schritt (ii) angelegt wurde), wobei

$$w_{(n+1)k} = 2, \quad k = 1, \dots, m, \quad \text{und} \quad \theta_{n+1} = 1.$$

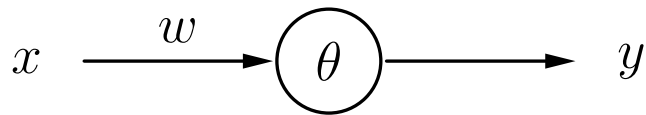
# Trainieren von Schwellenwertelementen

# Trainieren von Schwellenwertelementen

- Die geometrische Interpretation bietet eine Möglichkeit, SWE mit 2 und 3 Eingängen zu konstruieren, aber:
  - Es ist keine automatische Methode (Visualisierung und Begutachtung ist nötig).
  - Nicht möglich für mehr als drei Eingabevariablen.
- **Grundlegende Idee des automatischen Trainings:**
  - Beginne mit zufälligen Werten für Gewichte und Schwellenwert.
  - Bestimme den Ausgabefehler für eine Menge von Trainingsbeispielen.
  - Der Fehler ist eine Funktion der Gewichte und des Schwellenwerts:  $e = e(w_1, \dots, w_n)$
  - Passe Gewichte und Schwellenwert so an, dass der Fehler kleiner wird.
  - Wiederhole diese Anpassung, bis der Fehler verschwindet.

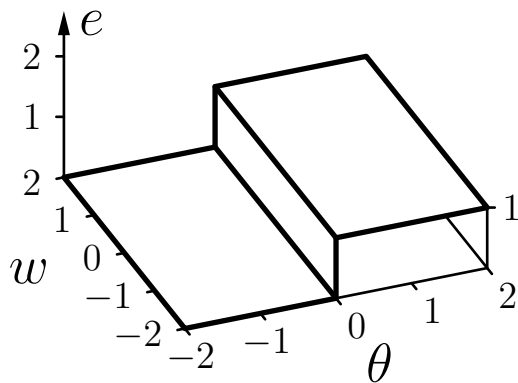
# Trainieren von Schwellenwertelementen

Schwellenwertelement mit einer Eingabe für die Negation  $\neg x$ .

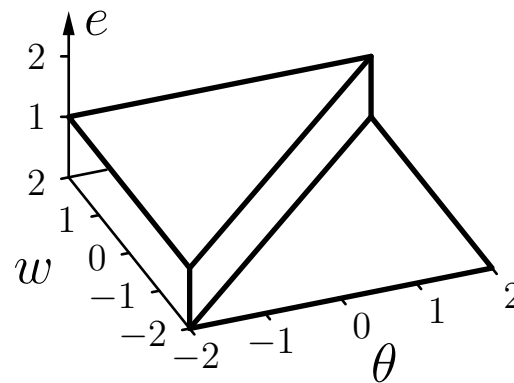


$x$	$y$
0	1
1	0

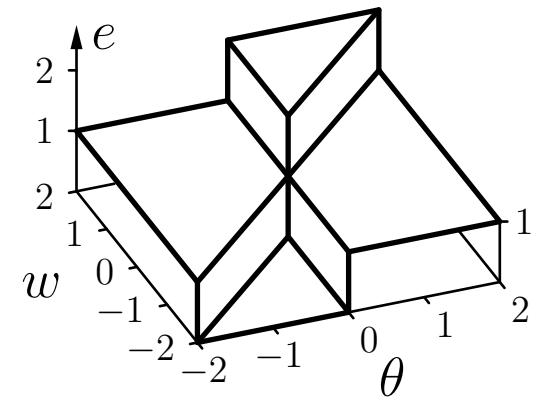
Ausgabefehler als eine Funktion von Gewicht und Schwellenwert.



Fehler für  $x = 0$



Fehler für  $x = 1$

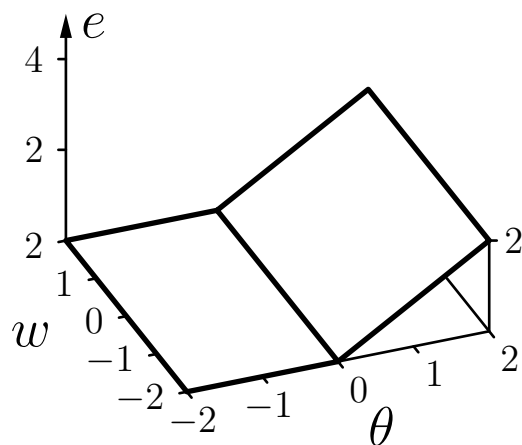


Summe der Fehler

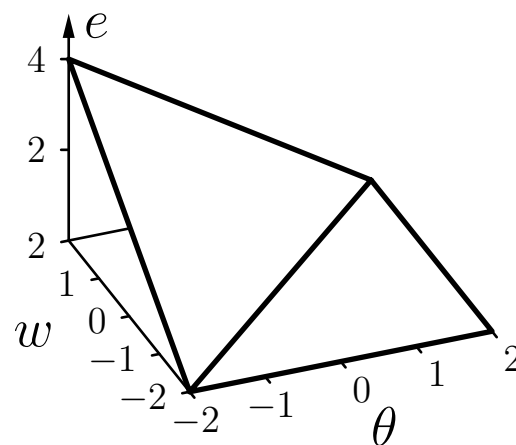
# Trainieren von Schwellenwertelementen

- Die Fehlerfunktion kann nicht direkt verwendet werden, da sie aus Plateaus besteht.
- Lösung: Falls die berechnete Ausgabe falsch ist, dann berücksichtige, wie weit  $\theta$  überschritten (für  $x = 0$ ) oder unterschritten ist (für  $x = 1$ ).
- anschaulich: Berechnung ist „umso falscher“, je weiter  $\theta$  überschritten (für  $x = 0$ ) bzw. unterschritten ist (für  $x = 1$ ).

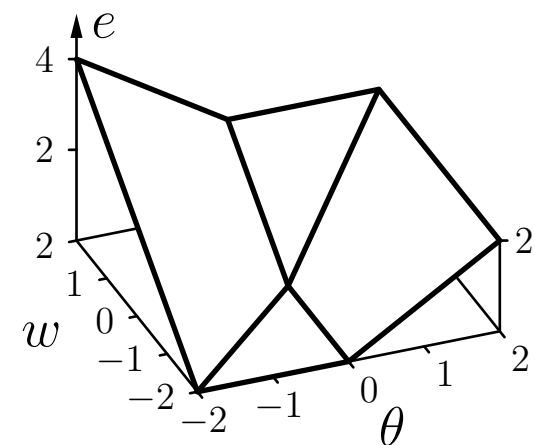
**Modifizierter Ausgabebefehler als Funktion von  $\vec{w}$  und  $\theta$ .**



Fehler für  $x = 0$



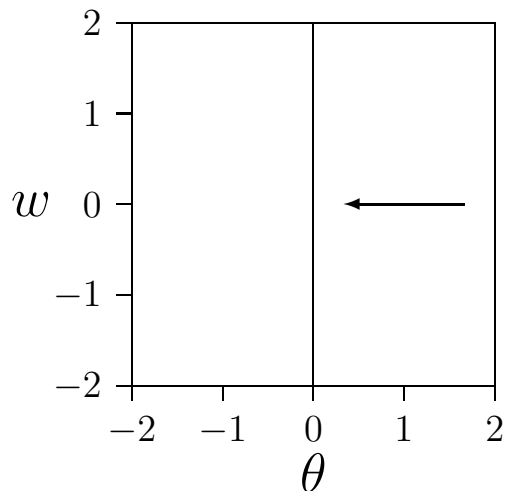
Fehler für  $x = 1$



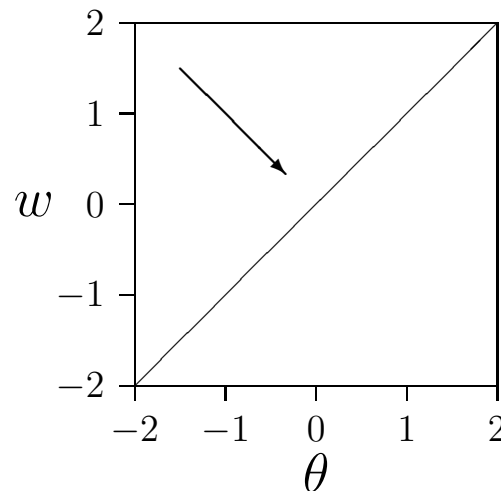
Summe der Fehler

# Trainieren von Schwellenwertelementen

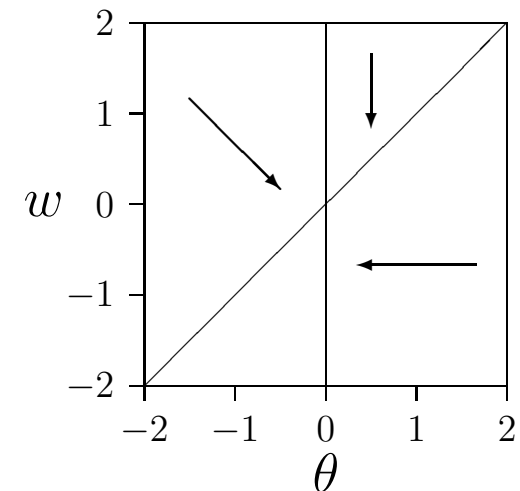
**Schema der resultierenden Richtungen der Parameteränderungen.**



Änderungen für  $x = 0$



Änderungen für  $x = 1$

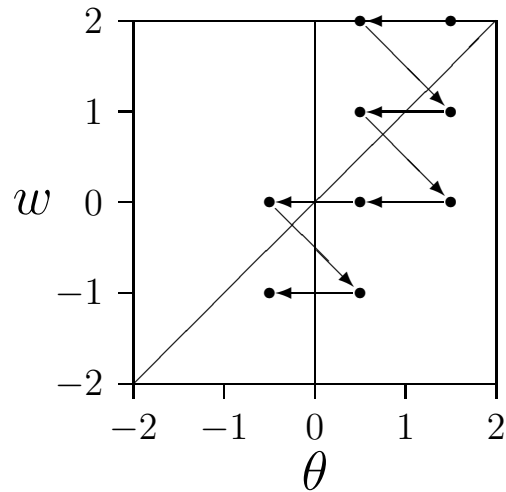


Summe der Änderungen

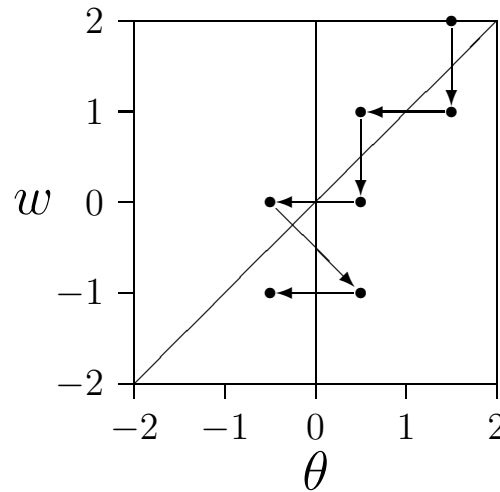
- Beginne an zufälligem Punkt.
- Passe Parameter iterativ an, entsprechend der zugehörigen Richtung am aktuellen Punkt.

# Trainieren von Schwellenwertelementen

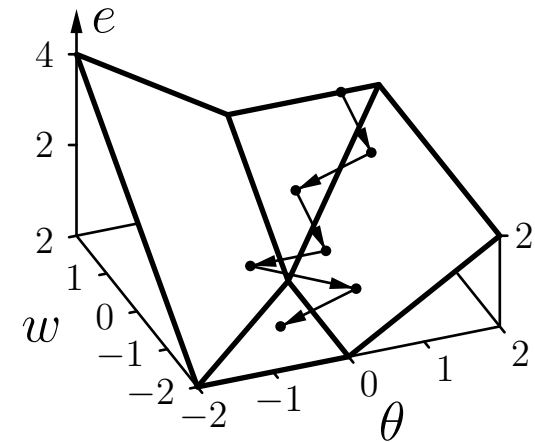
## Beispieltrainingsprozedur: Online- und Batch-Training.



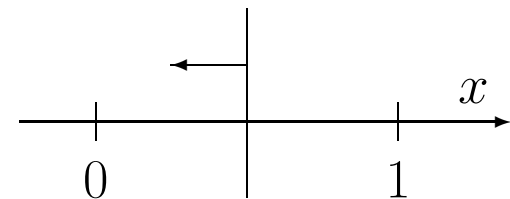
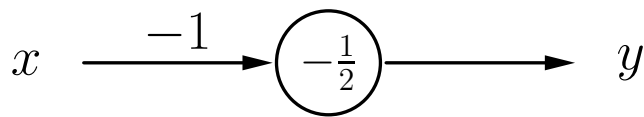
Online-Lernen



Batch-Lernen



Batch-Lernen





# Trainieren von Schwellenwertelementen: Delta-Regel

**Formale Trainingsregel:** Sei  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  ein Eingabevektor eines Schwellenwertelements,  $o$  die gewünschte Ausgabe für diesen Eingabevektor, und  $y$  die momentane Ausgabe des Schwellenwertelements. Wenn  $y \neq o$ , dann werden Schwellenwert  $\theta$  und Gewichtsvektor  $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n)$  wie folgt angepasst, um den Fehler zu reduzieren:

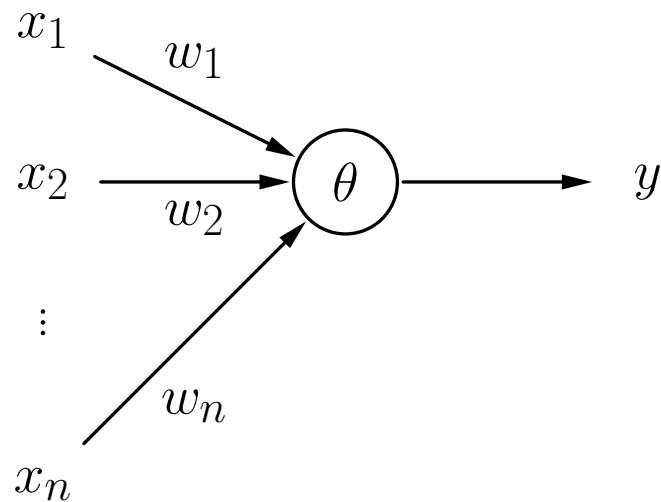
$$\begin{aligned} \theta^{(\text{neu})} &= \theta^{(\text{alt})} + \Delta\theta & \text{wobei } \Delta\theta &= -\eta(o - y), \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} : w_i^{(\text{neu})} &= w_i^{(\text{alt})} + \Delta w_i & \text{wobei } \Delta w_i &= \eta(o - y)x_i, \end{aligned}$$

wobei  $\eta$  ein Parameter ist, der **Lernrate** genannt wird. Er bestimmt die Größenordnung der Gewichtsänderungen. Diese Vorgehensweise nennt sich **Delta-Regel** oder **Widrow–Hoff–Procedure** [Widrow and Hoff 1960].

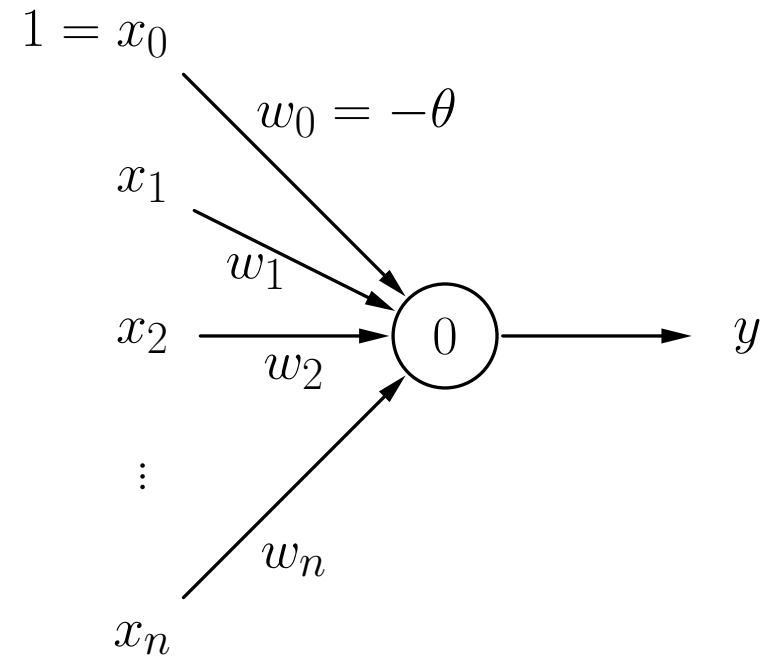
- **Online-Training:** Passe Parameter nach jedem Trainingsmuster an.
- **Batch-Training:** Passe Parameter am Ende jeder **Epoche** an, d.h. nach dem Durchlaufen aller Trainingsbeispiele.

# Trainieren von Schwellenwertelementen: Delta-Regel

## Ändern des Schwellenwerts in ein Gewicht:



$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \geq \theta$$



$$\sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta \geq 0$$

# Trainieren von Schwellenwertelementen: Delta-Regel

```
procedure online_training (var  $\vec{w}$ , var  $\theta$ ,  $L$ ,  $\eta$ );  
var  $y$ ,  $e$ ; (* Ausgabe, Fehlersumme *)  
begin  
  repeat  
     $e := 0$ ; (* initialisiere Fehlersumme *)  
    for all  $(\vec{x}, o) \in L$  do begin (* durchlaufe Trainingsmuster*)  
      if  $(\vec{w}\vec{x} \geq \theta)$  then  $y := 1$ ; (* berechne Ausgabe*)  
      else  $y := 0$ ; (* des Schwellenwertelements *)  
      if  $(y \neq o)$  then begin (* Falls Ausgabe falsch *)  
         $\theta := \theta - \eta(o - y)$ ; (* passe Schwellenwert *)  
         $\vec{w} := \vec{w} + \eta(o - y)\vec{x}$ ; (* und Gewichte an *)  
         $e := e + |o - y|$ ; (* summiere die Fehler*)  
      end;  
    end;  
  until  $(e \leq 0)$ ; (* wiederhole die Berechnungen*)  
end; (* bis der Fehler verschwindet*)
```

# Trainieren von Schwellenwertelementen: Delta-Regel

```
procedure batch_training (var  $\vec{w}$ , var  $\theta$ ,  $L$ ,  $\eta$ );  
var  $y$ ,  $e$ , (* Ausgabe, Fehlersumme *)  
     $\theta_c$ ,  $\vec{w}_c$ ; (* summierte Änderungen *)  
begin  
  repeat  
     $e := 0$ ;  $\theta_c := 0$ ;  $\vec{w}_c := \vec{0}$ ; (* Initialisierungen *)  
    for all  $(\vec{x}, o) \in L$  do begin (* durchlaufe Trainingsbeispiele*)  
      if  $(\vec{w}\vec{x} \geq \theta)$  then  $y := 1$ ; (* berechne Ausgabe *)  
      else  $y := 0$ ; (* des Schwellenwertelementes *)  
      if  $(y \neq o)$  then begin (* Falls Ausgabe falsch*)  
         $\theta_c := \theta_c - \eta(o - y)$ ; (* summiere die Änderungen von*)  
         $\vec{w}_c := \vec{w}_c + \eta(o - y)\vec{x}$ ; (* Schwellenwert und Gewichten *)  
         $e := e + |o - y|$ ; (* summiere Fehler*)  
      end;  
    end;  
     $\theta := \theta + \theta_c$ ; (* passe Schwellenwert*)  
     $\vec{w} := \vec{w} + \vec{w}_c$ ; (* und Gewichte an *)  
  until  $(e \leq 0)$ ; (* wiederhole Berechnungen *)  
end; (* bis der Fehler verschwindet*)
```

# Trainieren von Schwellenwertelementen: Online

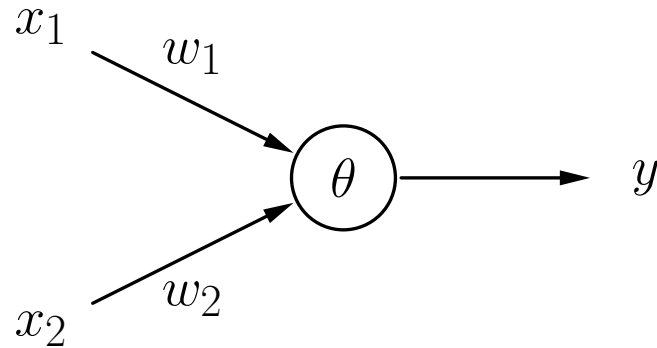
Epoche	$x$	$o$	$\vec{x}\vec{w}$	$y$	$e$	$\Delta\theta$	$\Delta w$	$\theta$	$w$
								1.5	2
1	0	1	-1.5	0	1	-1	0	0.5	2
	1	0	1.5	1	-1	1	-1	1.5	1
2	0	1	-1.5	0	1	-1	0	0.5	1
	1	0	0.5	1	-1	1	-1	1.5	0
3	0	1	-1.5	0	1	-1	0	0.5	0
	1	0	0.5	0	0	0	0	0.5	0
4	0	1	-0.5	0	1	-1	0	-0.5	0
	1	0	0.5	1	-1	1	-1	0.5	-1
5	0	1	-0.5	0	1	-1	0	-0.5	-1
	1	0	-0.5	0	0	0	0	-0.5	-1
6	0	1	0.5	1	0	0	0	-0.5	-1
	1	0	-0.5	0	0	0	0	-0.5	-1

# Trainieren von Schwellenwertelementen: Batch

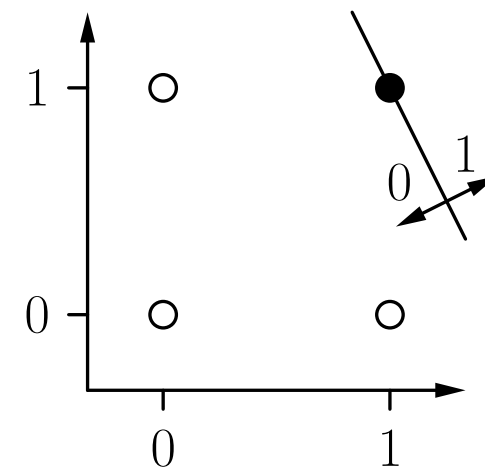
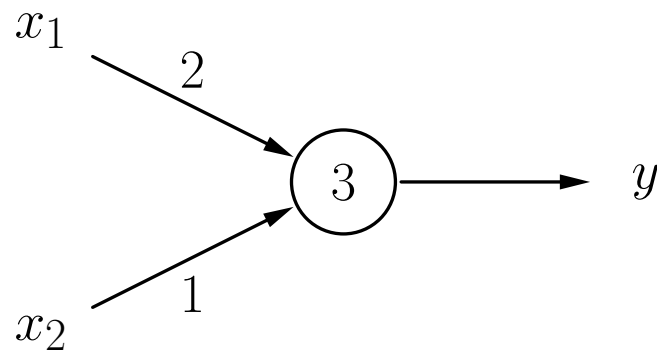
Epoche	$x$	$o$	$\vec{x}\vec{w}$	$y$	$e$	$\Delta\theta$	$\Delta w$	$\theta$	$w$
								1.5	2
1	0	1	-1.5	0	1	-1	0		
	1	0	0.5	1	-1	1	-1	1.5	1
2	0	1	-1.5	0	1	-1	0		
	1	0	-0.5	0	0	0	0	0.5	1
3	0	1	-0.5	0	1	-1	0		
	1	0	0.5	1	-1	1	-1	0.5	0
4	0	1	-0.5	0	1	-1	0		
	1	0	-0.5	0	0	0	0	-0.5	0
5	0	1	0.5	1	0	0	0		
	1	0	0.5	1	-1	1	-1	0.5	-1
6	0	1	-0.5	0	1	-1	0		
	1	0	-1.5	0	0	0	0	-0.5	-1
7	0	1	0.5	1	0	0	0		
	1	0	-0.5	0	0	0	0	-0.5	-1

# Trainieren von Schwellenwertelementen: Konjunktion

Schwellenwertelement mit zwei Eingängen für die Konjunktion.



$x_1$	$x_2$	$y$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1



# Trainieren von Schwellenwertelementen: Konjunktion

Epoche	$x_1$	$x_2$	$o$	$\vec{x}\vec{w}$	$y$	$e$	$\Delta\theta$	$\Delta w_1$	$\Delta w_2$	$\theta$	$w_1$	$w_2$
										0	0	0
1	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	1	0	0
	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0
	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0
	1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	0	1	1
2	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	1	1	1
	0	1	0	0	1	-1	1	0	-1	2	1	0
	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	2	1	0
	1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	1	2	1
3	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	2	1
	0	1	0	0	1	-1	1	0	-1	2	2	0
	1	0	0	0	1	-1	1	-1	0	3	1	0
	1	1	1	-2	0	1	-1	1	1	2	2	1
4	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	2	2	1
	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	2	2	1
	1	0	0	0	1	-1	1	-1	0	3	1	1
	1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	2	2	2
5	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	2	2	2
	0	1	0	0	1	-1	1	0	-1	3	2	1
	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	3	2	1
	1	1	1	0	1	0	0	0	0	3	2	1
6	0	0	0	-3	0	0	0	0	0	3	2	1
	0	1	0	-2	0	0	0	0	0	3	2	1
	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	3	2	1
	1	1	1	0	1	0	0	0	0	3	2	1



# Trainieren von Schwellenwertelementen: Biimplikation

Epoch	$x_1$	$x_2$	$o$	$\vec{x}\vec{w}$	$y$	$e$	$\Delta\theta$	$\Delta w_1$	$\Delta w_2$	$\theta$	$w_1$	$w_2$
										0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	1	-1	1	0	-1	1	0	-1
	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	-1
	1	1	1	-2	0	1	-1	1	1	0	1	0
2	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	1	-1	1	0	-1	1	1	-1
	1	0	0	0	1	-1	1	-1	0	2	0	-1
	1	1	1	-3	0	1	-1	1	1	1	1	0
3	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	1	-1	1	0	-1	1	1	-1
	1	0	0	0	1	-1	1	-1	0	2	0	-1
	1	1	1	-3	0	1	-1	1	1	1	1	0

# Trainieren von Schwellenwertelementen: Konvergenz

**Konvergenztheorem:** Sei  $L = \{(\vec{x}_1, o_1), \dots, (\vec{x}_m, o_m)\}$  eine Menge von Trainingsmustern, jedes bestehend aus einem Eingabevektor  $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^n$  und einer gewünschten Ausgabe  $o_i \in \{0, 1\}$ . Sei weiterhin  $L_0 = \{(\vec{x}, o) \in L \mid o = 0\}$  und  $L_1 = \{(\vec{x}, o) \in L \mid o = 1\}$ . Falls  $L_0$  und  $L_1$  linear separabel sind, d.h., falls  $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$  und  $\theta \in \mathbb{R}$  existieren, so dass

$$\begin{aligned} \forall (\vec{x}, 0) \in L_0 : \quad & \vec{w}\vec{x} < \theta \quad \text{und} \\ \forall (\vec{x}, 1) \in L_1 : \quad & \vec{w}\vec{x} \geq \theta, \end{aligned}$$

dann terminieren sowohl Online- als auch Batch-Training.

- Für nicht linear separable Probleme terminiert der Algorithmus nicht.

# Trainieren von Netzwerken aus Schwellenwertelementen

- Einzelne Schwellenwertelemente haben starke Einschränkungen: Sie können nur linear separable Funktionen berechnen.
- Netzwerke aus Schwellenwertelemente können beliebige Boolesche Funktionen berechnen.
- Das Trainieren einzelner Schwellenwertelemente mit der Delta-Regel ist schnell und findet garantiert eine Lösung, falls eine existiert.
- Netzwerke aus Schwellenwertelementen können nicht mit der Delta-Regel trainiert werden.