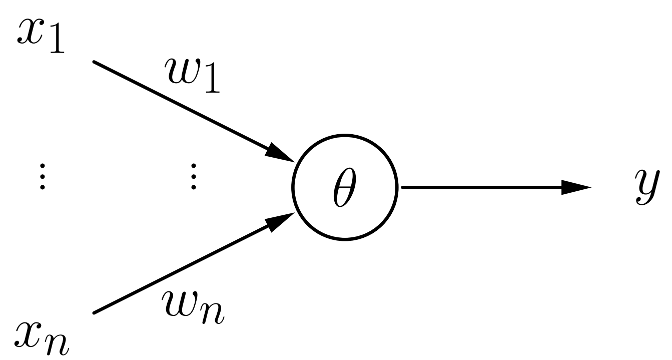
# Schwellenwertelemente

# Schwellenwertelemente

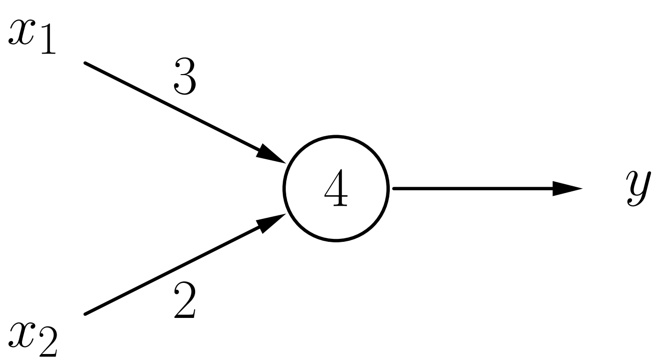
Ein **Schwellenwertelement** (Threshold Logic Unit, TLU) ist eine Verarbeitungseinheit für Zahlen mit $n$ Eingängen $x_1, \ldots, x_n$ und einem Ausgang $y$. Das Element hat einen **Schwellenwert** $\theta$ und jeder Eingang $x_i$ ist mit einem **Gewicht** $w_i$ versehen. Ein Schwellenwertelement berechnet die Funktion

$$y = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad \boldsymbol{xw} = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \geq \theta, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



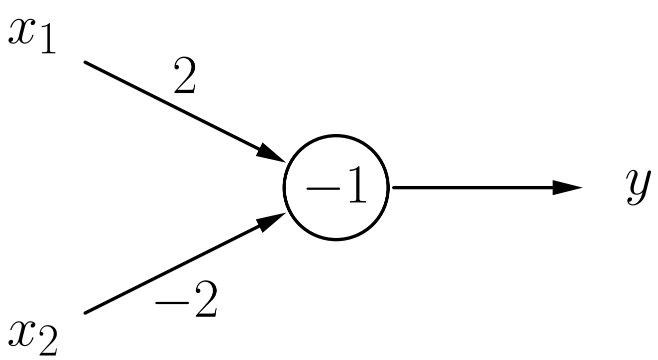
# Schwellenwertelemente: Beispiele

**Schwellenwertelement für die Konjunktion $x_1 \wedge x_2$.**




| $x_1$ | $x_2$ | $3x_1 + 2x_2$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 3 | 0 |
| 0 | 1 | 2 | 0 |
| 1 | 1 | 5 | 1 |

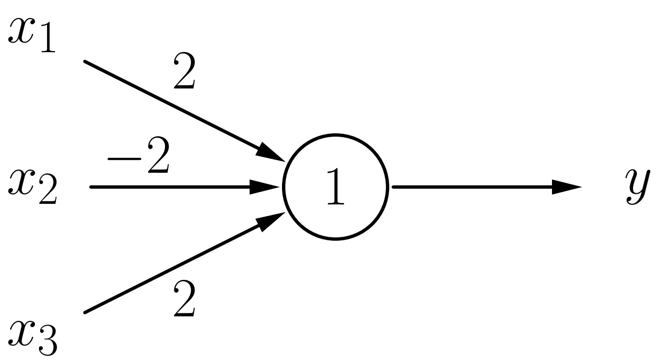
**Schwellenwertelement für die Implikation $x_2 \rightarrow x_1$.**




| $x_1$ | $x_2$ | $2x_1 - 2x_2$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 2 | 1 |
| 0 | 1 | $-2$ | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |

# Schwellenwertelemente: Beispiele

**Schwellenwertelement für** $(x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3)$.




| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\sum_i w_i x_i$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | $-2$ | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 4 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |

## Rückblick: Geradendarstellungen

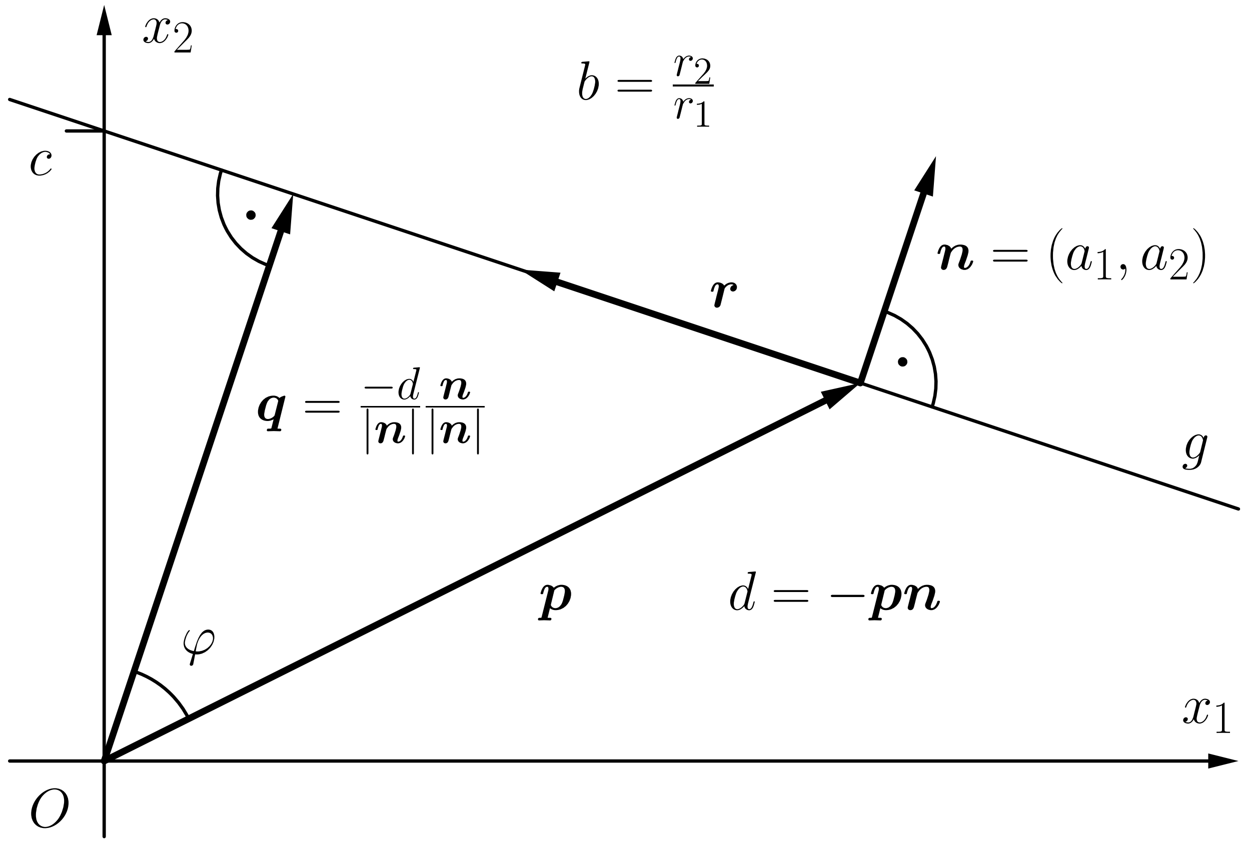
Geraden werden typischerweise in einer der folgenden Formen dargestellt:

| | | |
|---|---|---|
| Explizite Form: | $g \equiv$ | $x_2 = bx_1 + c$ |
| Implizite Form: | $g \equiv$ | $a_1x_1 + a_2x_2 + d = 0$ |
| Punkt-Richtungs-Form: | $g \equiv$ | $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + k\boldsymbol{r}$ |
| Normalform | $g \equiv$ | $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})\boldsymbol{n} = 0$ |

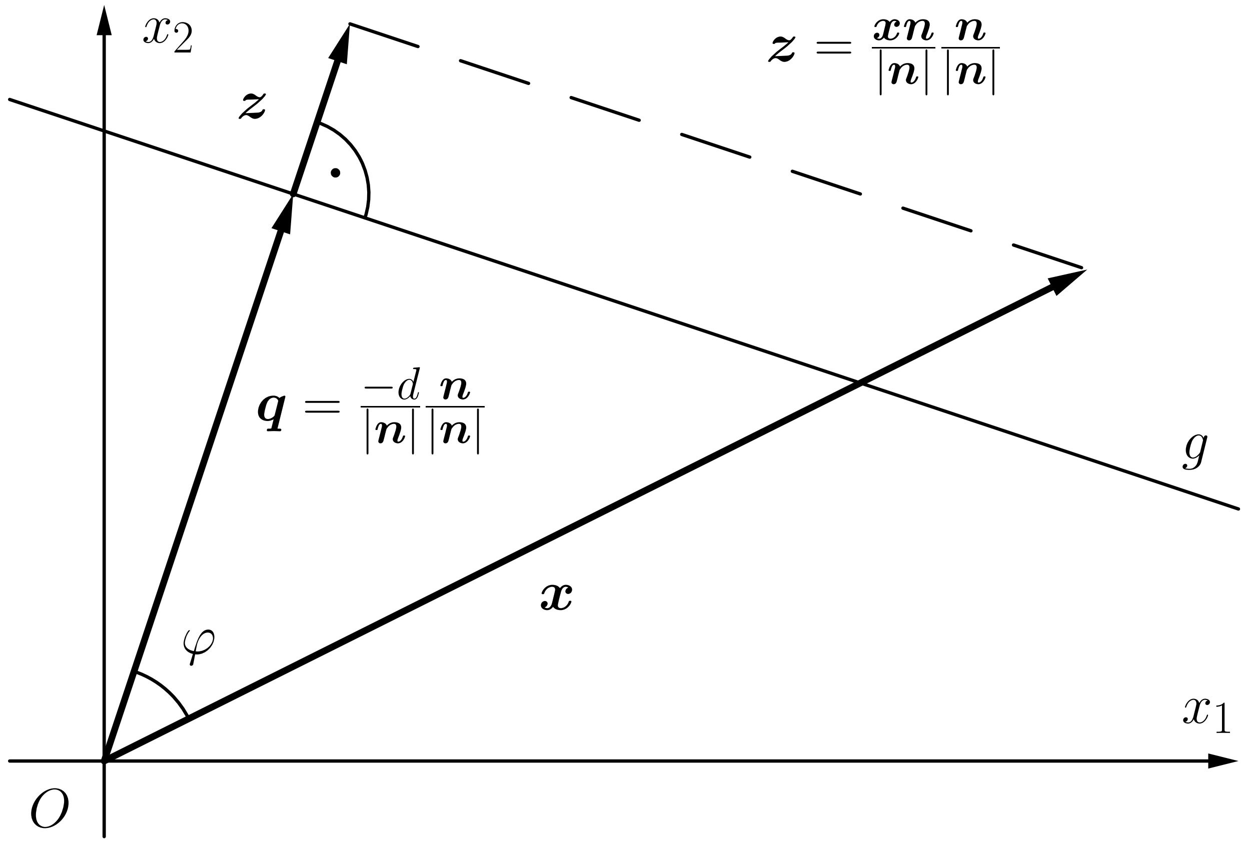
mit den Parametern

| | |
|---|---|
| $b$ : | Anstieg der Geraden |
| $c$ : | Abschnitt der $x_2$-Achse |
| $\boldsymbol{p}$ : | Vektor zu einem Punkt auf der Gerade (Ortsvektor) |
| $\boldsymbol{r}$ : | Richtungsvektor der Gerade |
| $\boldsymbol{n}$ : | Normalenvektor der Gerade |

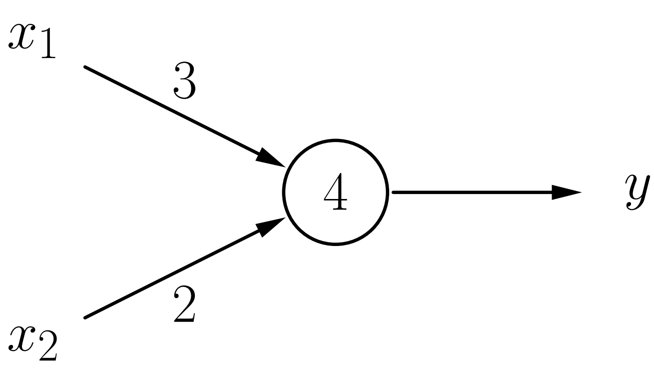
**Eine Gerade und ihre definierenden Eigenschaften.**

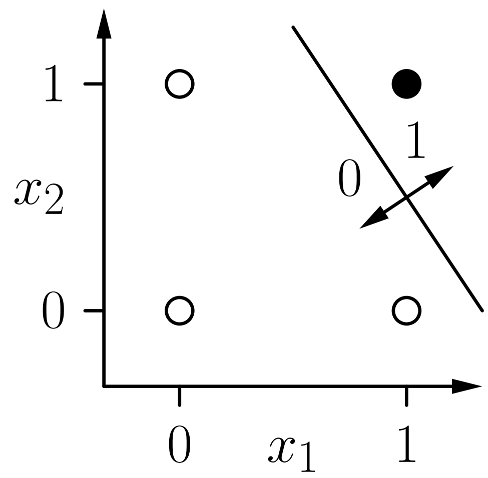


**Bestimmung, auf welcher Seite ein Punkt $\boldsymbol{x}$ liegt.**

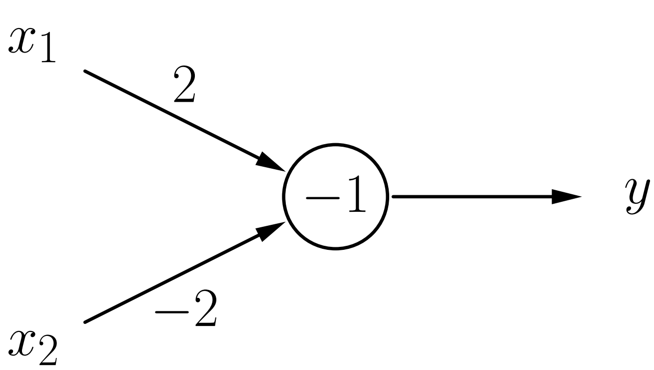


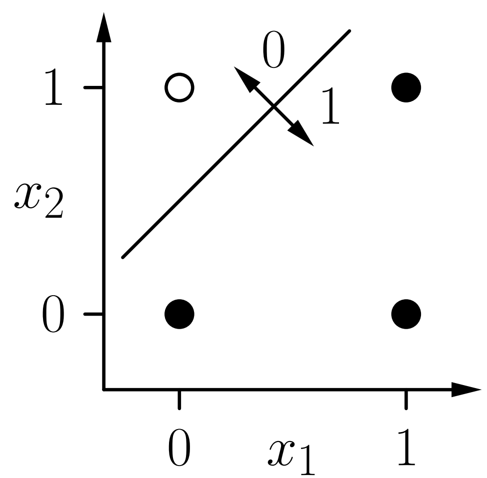
**Schwellenwertelement für $x_1 \wedge x_2$.**



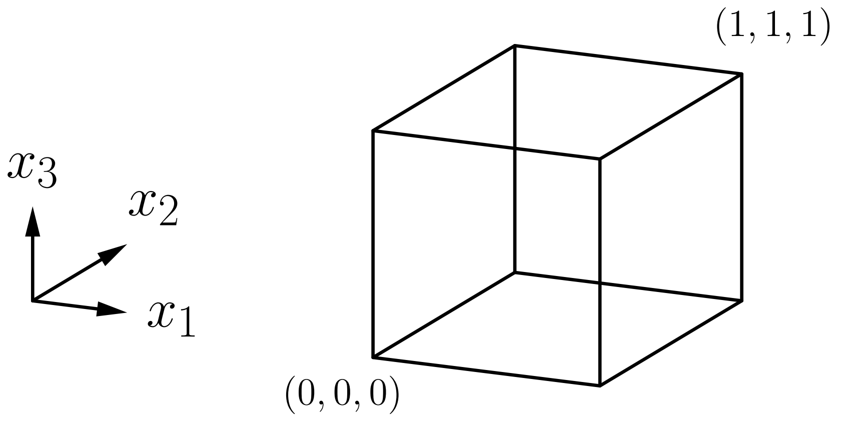




**Ein Schwellenwertelement für $x_2 \rightarrow x_1$.**

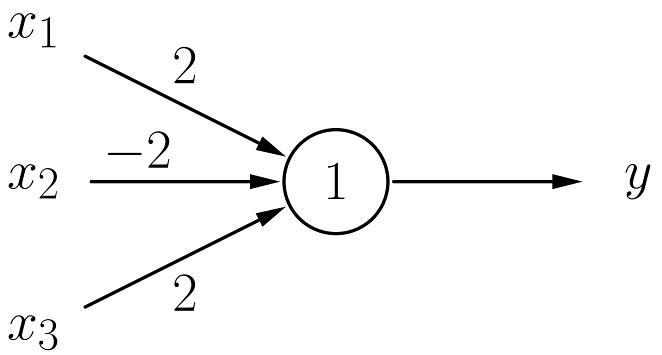


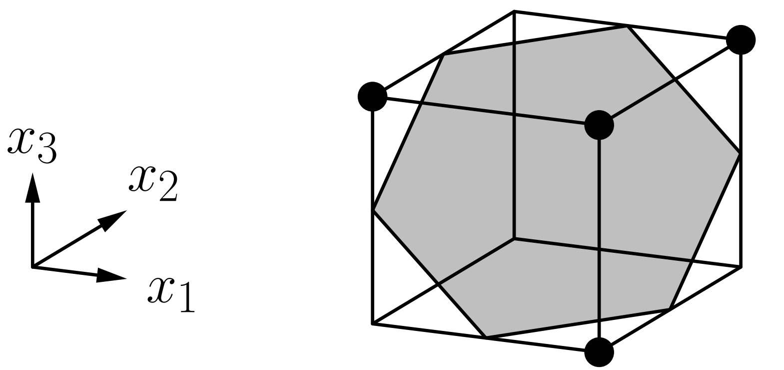



Darstellung 3-dimensionaler Boolescher Funktionen:




**Schwellenwertelement für** $(x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3)$**.**



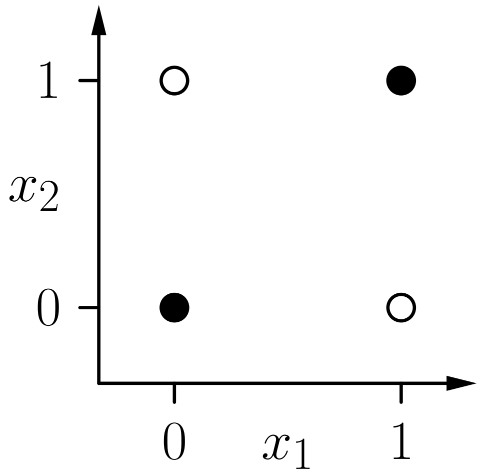
# Schwellenwertelemente: lineare Separabilität

- Zwei Punktmengen in einem n-dimensionalen Raum heißen linear separabel, wenn sie durch eine (n-1)-dimensionale Hyperebene getrennt werden können. Die Punkte der einen Menge dürfen dabei auch auf der Hyperebene liegen.

- Eine Boolesche Funktion heißt linear separabel, falls die Menge der Urbilder von 0 und die Menge der Urbilder von 1 linear separabel sind.

**Das Biimplikationsproblem $x_1 \leftrightarrow x_2$: Es gibt keine Trenngerade.**

| $x_1$ | $x_2$ | $y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |




**Formaler Beweis** durch *reductio ad absurdum*:

$$
\begin{array}{llll}
\text{da } (0,0) \mapsto 1: & 0 & \geq \theta, & (1) \\
\text{da } (1,0) \mapsto 0: & w_1 & < \theta, & (2) \\
\text{da } (0,1) \mapsto 0: & w_2 & < \theta, & (3) \\
\text{da } (1,1) \mapsto 1: & w_1 + w_2 & \geq \theta. & (4)
\end{array}
$$

(2) und (3): $w_1 + w_2 < 2\theta$. Mit (4): $2\theta > \theta$, oder $\theta > 0$. Widerspruch zu (1).

# Schwellenwertelemente: Grenzen

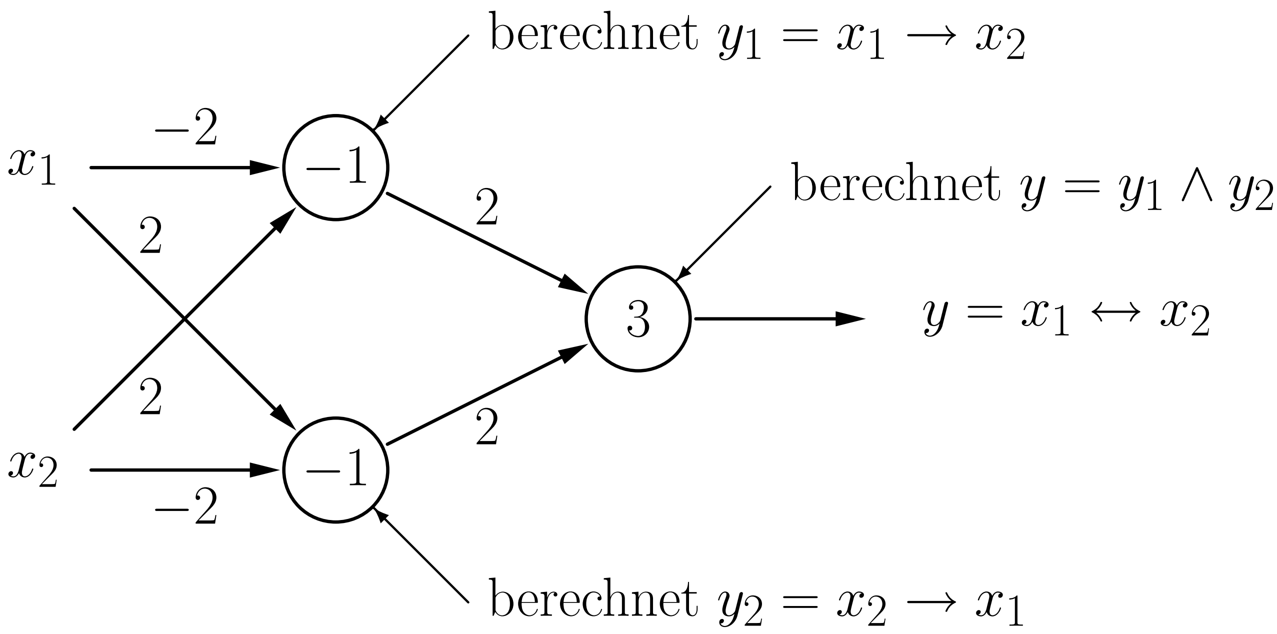
**Vergleich zwischen absoluter Anzahl und der Anzahl linear separabler Boolescher Funktionen.**
([Widner 1960] zitiert in [Zell 1994])

| Eingaben | Boolesche Funktionen | linear separable Funktionen |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 4 |
| 2 | 16 | 14 |
| 3 | 256 | 104 |
| 4 | 65536 | 1774 |
| 5 | $4.3 \cdot 10^9$ | 94572 |
| 6 | $1.8 \cdot 10^{19}$ | $5.0 \cdot 10^6$ |

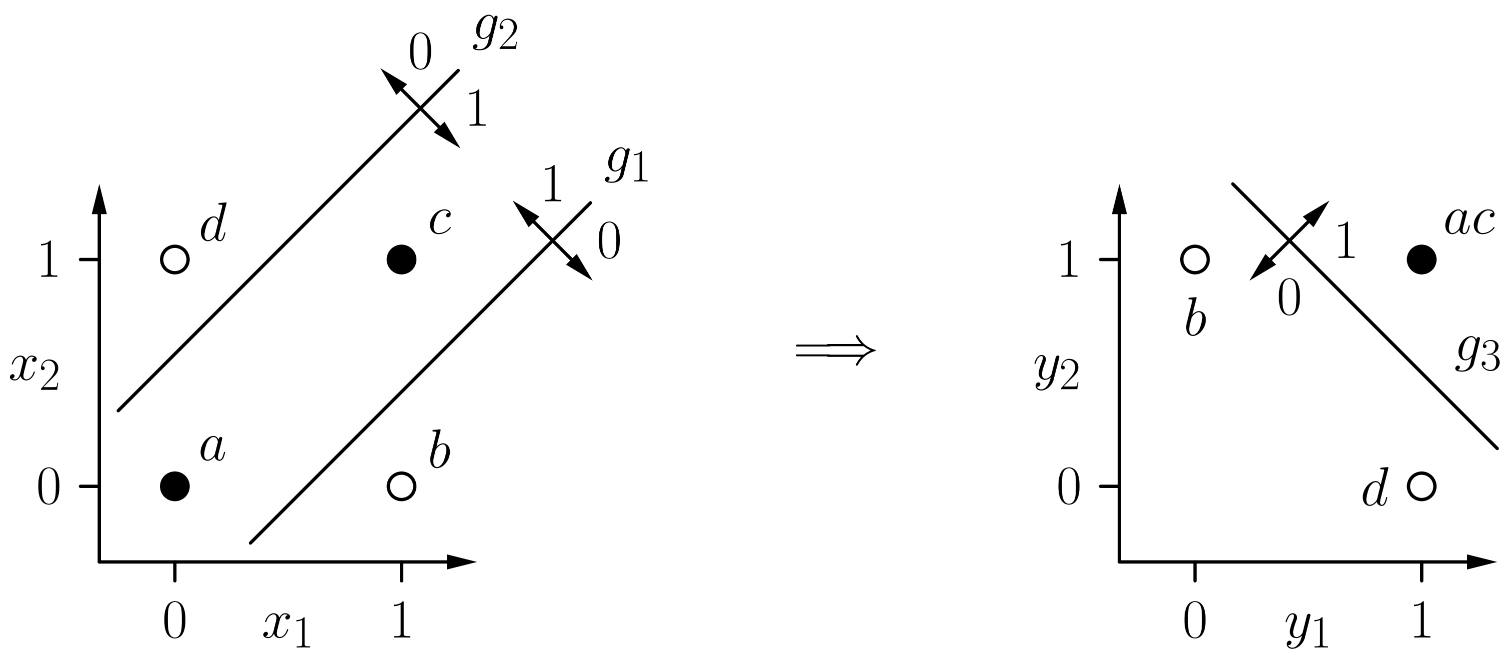
- Für viele Eingaben kann ein SWE fast keine Funktion berechnen.
- Netze aus Schwellenwertelementen sind notwendig, um die Berechnungsfähigkeiten zu erweitern.

**Biimplikationsproblem, Lösung durch ein Netzwerk.**

Idee: logische Zerlegung $\quad x_1 \leftrightarrow x_2 \;\equiv\; (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_1)$



**Lösung des Biimplikationsproblems: Geometrische Interpretation**




- Die erste Schicht berechnet neue Boolesche Koordinaten für die Punkte.
- Nach der Koordinatentransformation ist das Problem linear separabel.

# Darstellung beliebiger Boolescher Funktionen

Sei $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ eine Boolesche Funktion mit $n$ Variablen.

(i) Stelle $f(x_1, \ldots, x_n)$ in disjunktiver Normalform dar. D.h. bestimme $D_f = K_1 \vee \ldots \vee K_m$, wobei alle $K_j$ Konjunktionen von $n$ Literalen sind, d.h., $K_j = l_{j1} \wedge \ldots \wedge l_{jn}$ mit $l_{ji} = x_i$ (positives Literal) oder $l_{ji} = \neg x_i$ (negatives Literal).

(ii) Lege ein Neuron für jede Konjunktion $K_j$ der disjunktiven Normalform an (mit $n$ Eingängen — ein Eingang pro Variable), wobei

$$w_{ji} = \begin{cases} 2, & \text{falls } l_{ji} = x_i, \\ -2, & \text{falls } l_{ji} = \neg x_i, \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \theta_j = n - 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} w_{ji}.$$

(iii) Lege ein Ausgabeneuron an (mit $m$ Eingängen — ein Eingang für jedes Neuron, das in Schritt (ii) angelegt wurde), wobei

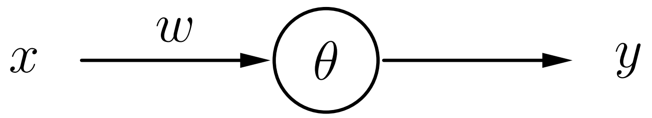
$$w_{(n+1)k} = 2, \quad k = 1, \ldots, m, \qquad \text{und} \qquad \theta_{n+1} = 1.$$

# Trainieren von Schwellenwertelementen

# Trainieren von Schwellenwertelementen

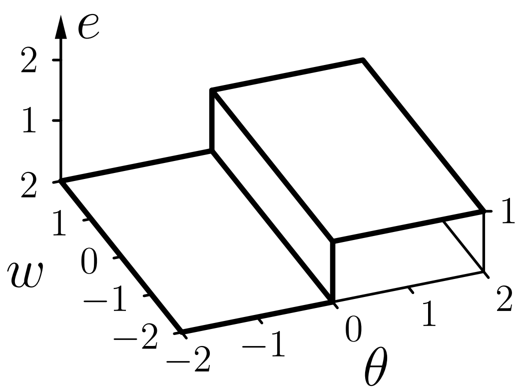
- Die geometrische Interpretation bietet eine Möglichkeit, SWE mit 2 und 3 Eingängen zu konstruieren, aber:
  - Es ist keine automatische Methode (Visualisierung und Begutachtung ist nötig).
  - Nicht möglich für mehr als drei Eingabevariablen.
- **Grundlegende Idee des automatischen Trainings:**
  - Beginne mit zufälligen Werten für Gewichte und Schwellenwert.
  - Bestimme den Ausgabefehler für eine Menge von Trainingsbeispielen.
  - Der Fehler ist eine Funktion der Gewichte und des Schwellenwerts: $e = e(w_1, \ldots, w_n, \theta)$.
  - Passe Gewichte und Schwellenwert so an, dass der Fehler kleiner wird.
  - Wiederhole diese Anpassung, bis der Fehler verschwindet.

**Schwellenwertelement mit einer Eingabe für die Negation $\neg x$.**

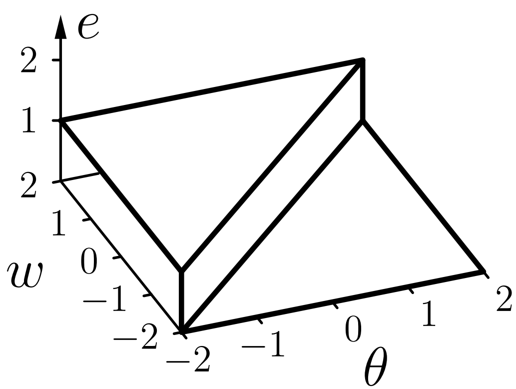



| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

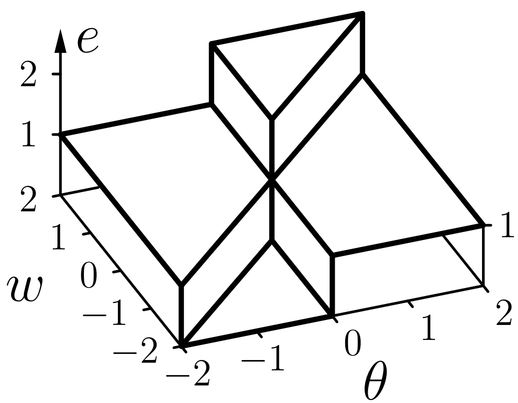
**Ausgabefehler als eine Funktion von Gewicht und Schwellenwert.**




Fehler für $x = 0$




Fehler für $x = 1$

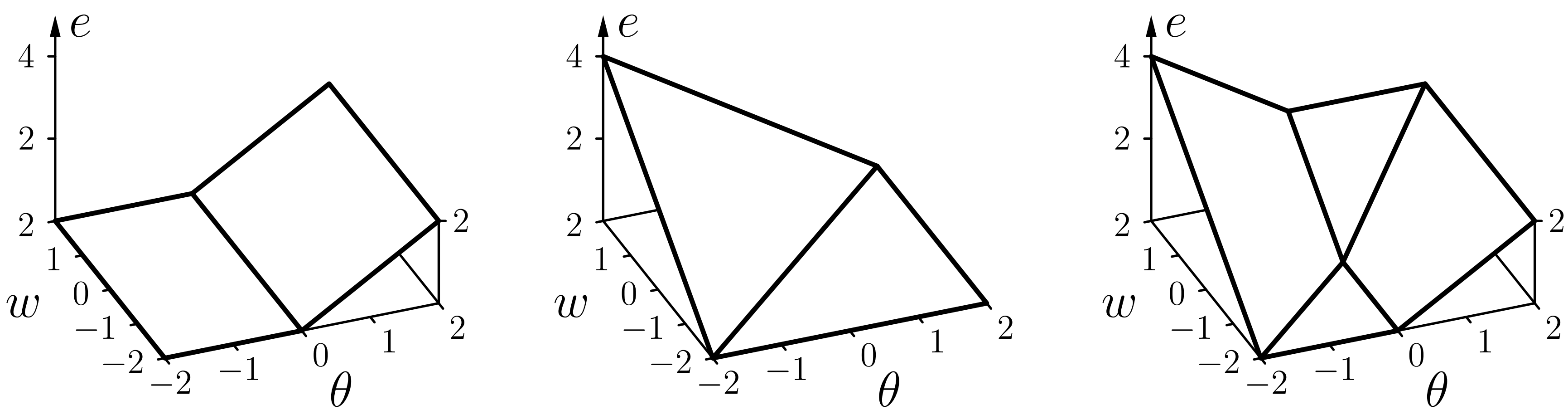



Summe der Fehler

# Trainieren von Schwellenwertelementen

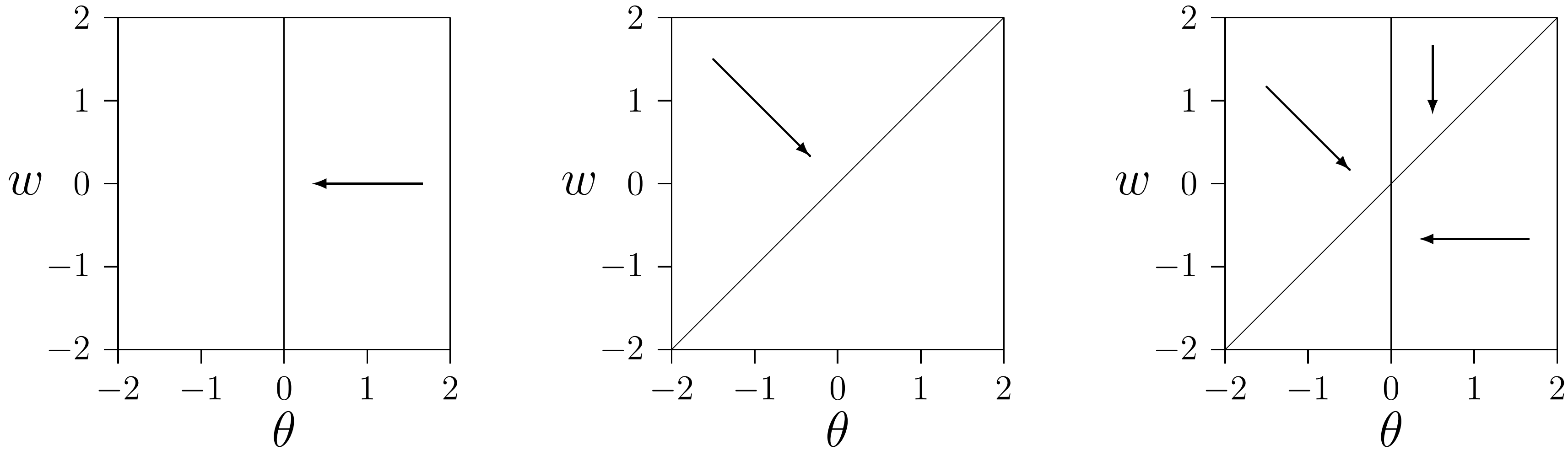
- Die Fehlerfunktion kann nicht direkt verwendet werden, da sie aus Plateaus besteht.
- Lösung: Falls die berechnete Ausgabe falsch ist,
  berücksichtige, wie weit die gewichtete Summe vom Schwellenwert entfernt ist.

**Modifizierter Ausgabefehler als Funktion von Gewichten und Schwellenwert.**




Fehler für $x = 0$ Fehler für $x = 1$ Summe der Fehler

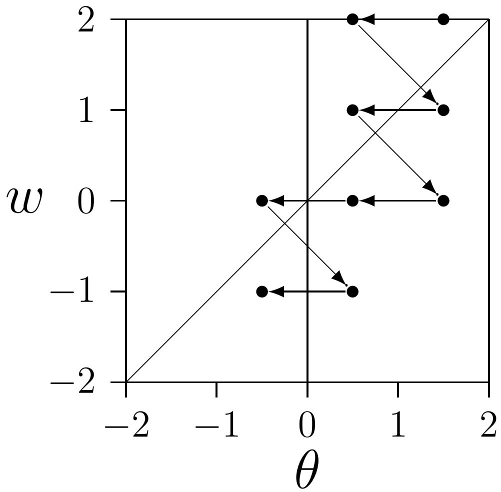
**Schema der resultierenden Richtungen der Parameteränderungen.**



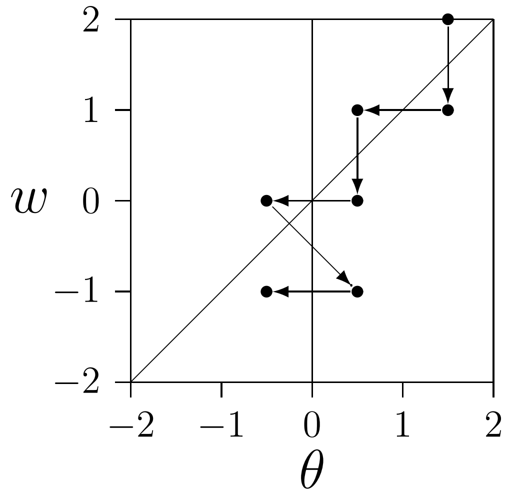

Änderungen für $x = 0$ Änderungen für $x = 1$ Summe der Änderungen

- Beginne an zufälligem Punkt.
- Passe Parameter iterativ an,
  entsprechend der zugehörigen Richtung am aktuellen Punkt.

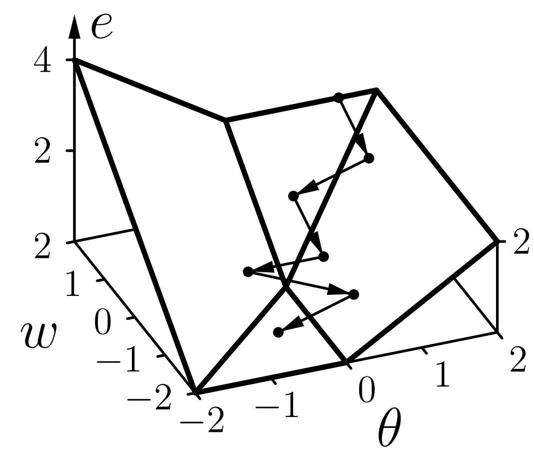
**Beispieltrainingsprozedur: Online- und Batch-Training.**



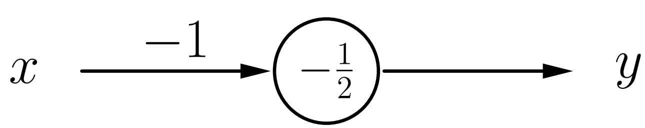

Online-Lernen

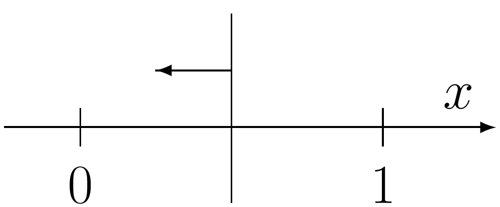



Batch-Lernen




Batch-Lernen



# Trainieren von Schwellenwertelementen: Delta-Regel

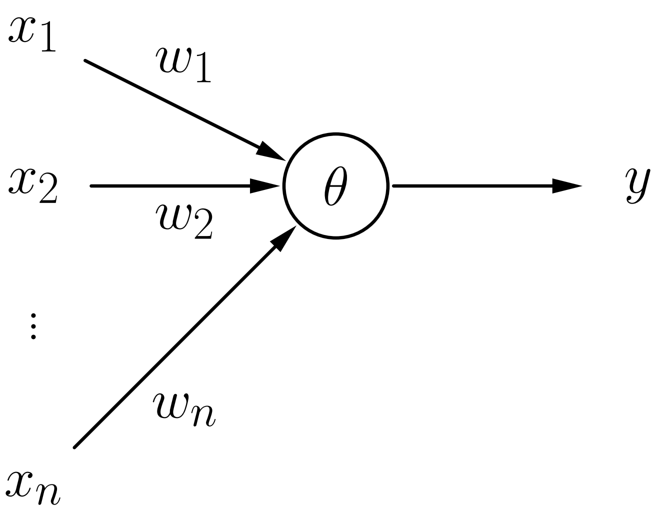
**Formale Trainingsregel:** Sei $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ein Eingabevektor eines Schwellenwertelements, $o$ die gewünschte Ausgabe für diesen Eingabevektor, und $y$ die momentane Ausgabe des Schwellenwertelements. Wenn $y \neq o$, dann werden Schwellenwert $\theta$ und Gewichtsvektor $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ wie folgt angepasst, um den Fehler zu reduzieren:

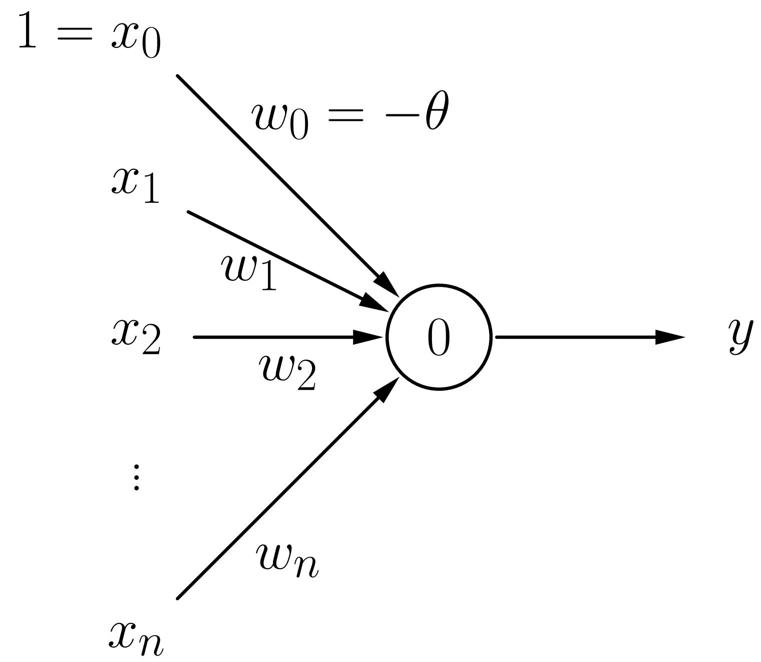
$$\begin{aligned} \theta^{(\text{neu})} &= \theta^{(\text{alt})} + \Delta\theta \quad \text{wobei} \quad \Delta\theta = -\eta(o-y), \\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}: \quad w_i^{(\text{neu})} &= w_i^{(\text{alt})} + \Delta w_i \quad \text{wobei} \quad \Delta w_i = \quad \eta(o-y)x_i, \end{aligned}$$

wobei $\eta$ ein Parameter ist, der **Lernrate** genannt wird. Er bestimmt die Größenordnung der Gewichtsänderungen. Diese Vorgehensweise nennt sich **Delta-Regel** oder **Widrow–Hoff–Procedure** [Widrow and Hoff 1960].

- **Online-Training:** Passe Parameter nach jedem Trainingsmuster an.
- **Batch-Training:** Passe Parameter am Ende jeder **Epoche** an,
  d.h. nach dem Durchlaufen aller Trainingsbeispiele.

**Ändern des Schwellenwerts in ein Gewicht:**




$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \geq \theta \qquad\qquad \sum_{i=1}^{n} w_i x_i - \theta \geq 0$$

# Trainieren von Schwellenwertelementen: Delta-Regel

```
procedure online_training (var w, var θ, L, η);
var y, e;                                      (* Ausgabe, Fehlersumme *)
begin
  repeat
    e := 0;                                    (* initialisiere Fehlersumme *)
    for all (x, o) ∈ L do begin                (* durchlaufe Trainingsmuster*)
      if (wx ≥ θ) then   y := 1;               (* berechne Ausgabe*)
                  else   y := 0;               (* des Schwellenwertelements *)
      if (y ≠ o) then begin                    (* Falls Ausgabe falsch *)
        θ  := θ  − η(o − y);                   (* passe Schwellenwert *)
        w  := w + η(o − y)x;                   (* und Gewichte an *)
        e  := e  +  |o − y|;                   (* summiere die Fehler*)
      end;
    end;
  until (e ≤ 0);                               (* wiederhole die Berechnungen*)
end;                                           (* bis der Fehler verschwindet*)
```

```
procedure batch_training (var w, var θ, L, η);
var y, e,                                    (* Ausgabe, Fehlersumme *)
    θ_c, w_c;                                (* summierte Änderungen *)
begin
  repeat
    e := 0; θ_c := 0; w_c := 0;              (* Initialisierungen *)
    for all (x, o) ∈ L do begin              (* durchlaufe Trainingsbeispiele*)
      if (wx ≥ θ) then  y := 1;              (* berechne Ausgabe *)
                  else  y := 0;              (* des Schwellenwertelements *)
      if (y ≠ o) then begin                  (* Falls Ausgabe falsch*)
        θ_c := θ_c − η(o − y);               (* summiere die Änderungen von*)
        w_c := w_c + η(o − y)x;              (* Schwellenwert und Gewichten *)
        e   := e   + |o − y|;                (* summiere Fehler*)
      end;
    end;
    θ := θ + θ_c;                            (* passe Schwellenwert*)
    w := w + w_c;                            (* und Gewichte an *)
  until (e ≤ 0);                             (* wiederhole Berechnungen *)
end;                                         (* bis der Fehler verschwindet*)
```

# Trainieren von Schwellenwertelementen: Online

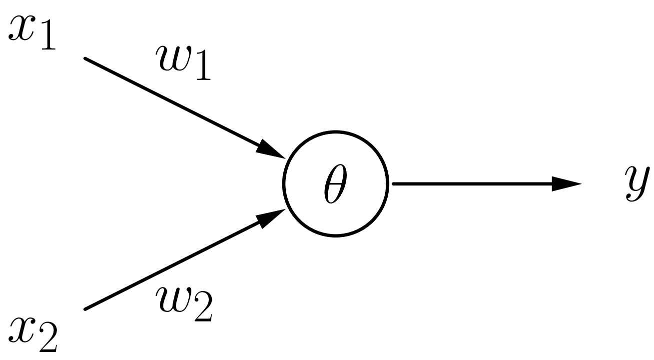
| Epoche | $x$ | $o$ | $\boldsymbol{xw}$ | $y$ | $e$ | $\Delta\theta$ | $\Delta w$ | $\theta$ | $w$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | 1.5 | 2 |
| 1 | 0 | 1 | $-1.5$ | 0 | 1 | $-1$ | 0 | 0.5 | 2 |
| | 1 | 0 | 1.5 | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | 1.5 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | $-1.5$ | 0 | 1 | $-1$ | 0 | 0.5 | 1 |
| | 1 | 0 | 0.5 | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | 1.5 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | $-1.5$ | 0 | 1 | $-1$ | 0 | 0.5 | 0 |
| | 1 | 0 | 0.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | $-0.5$ | 0 | 1 | $-1$ | 0 | $-0.5$ | 0 |
| | 1 | 0 | 0.5 | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | 0.5 | $-1$ |
| 5 | 0 | 1 | $-0.5$ | 0 | 1 | $-1$ | 0 | $-0.5$ | $-1$ |
| | 1 | 0 | $-0.5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $-0.5$ | $-1$ |
| 6 | 0 | 1 | 0.5 | 1 | 0 | 0 | 0 | $-0.5$ | $-1$ |
| | 1 | 0 | $-0.5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $-0.5$ | $-1$ |

# Trainieren von Schwellenwertelementen: Batch

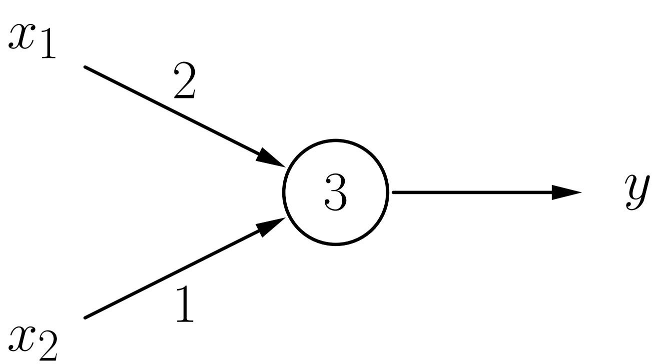
| Epoche | $x$ | $o$ | $\boldsymbol{xw}$ | $y$ | $e$ | $\Delta\theta$ | $\Delta w$ | $\theta$ | $w$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | 1.5 | 2 |
| 1 | 0 | 1 | $-1.5$ | 0 | 1 | $-1$ | 0 | | |
| | 1 | 0 | 0.5 | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | 1.5 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | $-1.5$ | 0 | 1 | $-1$ | 0 | | |
| | 1 | 0 | $-0.5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | $-0.5$ | 0 | 1 | $-1$ | 0 | | |
| | 1 | 0 | 0.5 | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | 0.5 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | $-0.5$ | 0 | 1 | $-1$ | 0 | | |
| | 1 | 0 | $-0.5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $-0.5$ | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0.5 | 1 | 0 | 0 | 0 | | |
| | 1 | 0 | 0.5 | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | 0.5 | $-1$ |
| 6 | 0 | 1 | $-0.5$ | 0 | 1 | $-1$ | 0 | | |
| | 1 | 0 | $-1.5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $-0.5$ | $-1$ |
| 7 | 0 | 1 | 0.5 | 1 | 0 | 0 | 0 | | |
| | 1 | 0 | $-0.5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $-0.5$ | $-1$ |

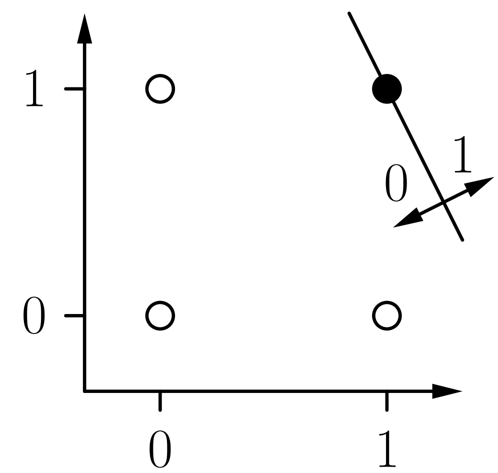
# Trainieren von Schwellenwertelementen: Konjunktion

**Schwellenwertelement mit zwei Eingängen für die Konjunktion.**




| $x_1$ | $x_2$ | $y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |



# Trainieren von Schwellenwertelementen: Konjunktion

| Epoche | $x_1$ | $x_2$ | $o$ | $\boldsymbol{xw}$ | $y$ | $e$ | $\Delta\theta$ | $\Delta w_1$ | $\Delta w_2$ | $\theta$ | $w_1$ | $w_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | −1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | 0 | 1 | 0 | −1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | 0 | −1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | 1 | 1 | 1 | −1 | 0 | 1 | −1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | −1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | −1 | 1 | 0 | −1 | 2 | 1 | 0 |
| | 1 | 0 | 0 | −1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 |
| | 1 | 1 | 1 | −1 | 0 | 1 | −1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | −1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | −1 | 1 | 0 | −1 | 2 | 2 | 0 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | −1 | 1 | −1 | 0 | 3 | 1 | 0 |
| | 1 | 1 | 1 | −2 | 0 | 1 | −1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | −2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 1 |
| | 0 | 1 | 0 | −1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 1 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | −1 | 1 | −1 | 0 | 3 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | −1 | 0 | 1 | −1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | −2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | −1 | 1 | 0 | −1 | 3 | 2 | 1 |
| | 1 | 0 | 0 | −1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | −3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 1 |
| | 0 | 1 | 0 | −2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 1 |
| | 1 | 0 | 0 | −1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 1 |

# Trainieren von Schwellenwertelementen: Biimplikation

| Epoch | $x_1$ | $x_2$ | $o$ | $\boldsymbol{xw}$ | $y$ | $e$ | $\Delta\theta$ | $\Delta w_1$ | $\Delta w_2$ | $\theta$ | $w_1$ | $w_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | −1 | 1 | 0 | −1 | 1 | 0 | −1 |
| | 1 | 0 | 0 | −1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | −1 |
| | 1 | 1 | 1 | −2 | 0 | 1 | −1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | −1 | 1 | 0 | −1 | 1 | 1 | −1 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | −1 | 1 | −1 | 0 | 2 | 0 | −1 |
| | 1 | 1 | 1 | −3 | 0 | 1 | −1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | −1 | 1 | 0 | −1 | 1 | 1 | −1 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | −1 | 1 | −1 | 0 | 2 | 0 | −1 |
| | 1 | 1 | 1 | −3 | 0 | 1 | −1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

# Trainieren von Schwellenwertelementen: Konvergenz

**Konvergenztheorem:** Sei $L = \{(\boldsymbol{x}_1, o_1), \dots (\boldsymbol{x}_m, o_m)\}$ eine Menge von Trainingsmustern, jedes bestehend aus einem Eingabevektor $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^n$ und einer gewünschten Ausgabe $o_i \in \{0, 1\}$. Sei weiterhin $L_0 = \{(\boldsymbol{x}, o) \in L \mid o = 0\}$ und $L_1 = \{(\boldsymbol{x}, o) \in L \mid o = 1\}$. Falls $L_0$ und $L_1$ linear separabel sind, d.h., falls $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ und $\theta \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$\begin{aligned} &\forall (\boldsymbol{x}, 0) \in L_0 : \quad && \boldsymbol{w}\boldsymbol{x} < \theta \qquad \text{und} \\ &\forall (\boldsymbol{x}, 1) \in L_1 : \quad && \boldsymbol{w}\boldsymbol{x} \geq \theta, \end{aligned}$$

dann terminieren sowohl Online- als auch Batch-Training.

- Für nicht linear separable Probleme terminiert der Algorithmus nicht.

# Trainieren von Netzwerken aus Schwellenwertelementen

- Einzelne Schwellenwertelemente haben starke Einschränkungen:
  Sie können nur linear separable Funktionen berechnen.

- Netzwerke aus Schwellenwertelemente können beliebige Boolesche Funktionen berechnen.

- Das Trainieren einzelner Schwellenwertelemente mit der Delta-Regel ist schnell und findet garantiert eine Lösung, falls eine existiert.

- Netzwerke aus Schwellenwertelementen können nicht mit der Delta-Regel trainiert werden.